Tema 4

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Contenidos

4.1. Definiciones generales

Se llaman ecuaciones en derivadas parciales (**EDP**) a aquellas ecuaciones diferenciales en las que la función incógnita depende de más de una variable independiente.

Estudiaremos el caso de dos variables independientes (que las denotaremos por x e y), mientras que a la función incógnita la notaremos por $z(x, y)$.

Con esta notación, las EDP de primer orden quedarán de la siguiente forma:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

o también, escribiendo las derivadas parciales de forma simplificada,

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \text{donde} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{4.1}$$

Una solución o integral de (4.1) es una función $z = z(x, y)$ que satisface la ecuación al sustituir en ella dicha función y sus derivadas parciales.

Interpretando x, y , z como las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, una integral $z = z(x, y)$ de la ecuación (4.1) representa una superficie que se conoce con el nombre de superficie integral de dicha ecuación.

4.2. Ecuaciones diferenciales totales. Ecuaciones de Pfaff

Se llama ecuación diferencial total (**EDT**) o ecuación de Pfaff, a una ecuación de la forma

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{4.2}$$

en la que supondremos que las funciones $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ y $R(x,y,z)$ son derivables respecto a todos sus argumentos.

Una expresión del tipo

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

se llama forma diferencial de Pfaff.

Diremos que una ecuación de Pfaff (4.2) es integrable si existe una función $\mu(x,y,z)$, a la que llamaremos factor integrante, tal que la expresión

$$\mu(x,y,z)\Big(P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)$$

es una forma diferencial exacta.

Es decir, la ecuación es integrable si existen funciones $\mu(x,y,z)$ y $U(x,y,z)$ tales que

$$\mu(x,y,z)\Big(P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big) = \mathrm{d}U(x,y,z)$$

A la función $U(x,y,z)$ la llamaremos función potencial. En tal caso, $U(x,y,z) = C$ es la solución general de la ecuación de Pfaff.

Pasemos a caracterizar esa condición de integrabilidad que acabamos de definir.

Teorema 1
La condición necesaria y suficiente para que una ecuación de Pfaff (4.2) sea integrable es que $\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = 0$, *siendo* $\vec{F} = (P,Q,R)$ *y* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F})$ *el rotacional del campo vectorial* $\vec{F}$.

Ejemplo 4.1
Verificar si la ecuación de Pfaff

$$(x+y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + x^2yz\,\mathrm{d}z = 0$$

es integrable.

Solución:

$(x+y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + x^2yz\,\mathrm{d}z = 0 \implies \vec{F} = \big(x+y, x-z, x^2yz\big)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\,(x+y, x-z, x^2yz) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & x-z & x^2yz \end{vmatrix} \\
&= \big(x^2z+1, -2xyz, 0\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) &= \big(x+y, x-z, x^2yz\big)\cdot\big(x^2z+1, -2xyz, 0\big) \\
&= x^3z + x + yx^2z + y - 2x^2yz + 2xyz^2 \\
&= x^3z + x + y - x^2yz + 2xyz^2 \neq 0 \implies \text{no integrable.}
\end{aligned}$$

------ o ------

Método general de integración de una ecuación de Pfaff

Se realizarán los siguientes pasos:

- Consideramos una variable como parámetro constante. Para fijar ideas y en lo que sigue, trabajaremos con la variable z como parámetro constante (en el caso de considerar otra variable como parámetro constante, el método se realizaría de una forma totalmente análoga). De esta forma tenemos que $\mathrm{d}z = 0$. En este primer paso hallaremos la solución general de la ecuación diferencial resultante:

  $$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y = 0$$

  Para ello habrá que obtener una función potencial $G(x,y,z)$ tal que

  $$\mathrm{d}G(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$

- Buscaremos un factor integrante $\mu(x,y,z)$ despejando de cualquiera de las dos siguientes ecuaciones:

  $$\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x} = \mu(x,y,z)\,P(x,y,z) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y} = \mu(x,y,z)\,Q(x,y,z)$$

- Resolveremos la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}G + K(G,z)\,\mathrm{d}z = 0$$

donde la función $K(G,z)$ viene dada por

$$K(G,z) = \mu(x,y,z)\,R(x,y,z) - \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}$$

Una vez obtenida la solución general de dicha ecuación, se sustituye el valor G por el ya conocido $G(x,y,z)$, obteniéndose así la solución general de la ecuación de Pfaff original $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Ejemplo 4.2

Verificar si la ecuación de Pfaff

$$yz\,\mathrm{d}x + \left(xz + yz^3\right)\,\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}z = 0$$

es integrable. En caso afirmativo resolverla.

Solución:

$$yz\,\mathrm{d}x + \left(xz + yz^3\right)\,\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \left(yz, xz + yz^3, -2xy\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(yz, xz + yz^3, -2xy\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz + yz^3 & -2xy \end{vmatrix} \\ &= \left(-3x - 3yz^2, 3y, 0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) &= \left(yz, xz + yz^3, -2xy\right) \cdot \left(-3x - 3yz^2, 3y, 0\right) \\ &= -3xyz - 3y^2z^3 + 3xyz + 3y^2z^3 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación es integrable.

Consideremos y como parámetro constante, con lo que $\mathrm{d}y = 0$. Así,

$$yz\,\mathrm{d}x + \left(xz + yz^3\right)\,\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Longrightarrow \quad yz\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}z = 0$$

que es una ecuación de variables separables.

Separándolas

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0 \implies \ln x - 2\ln z = \ln C \implies \ln\left(\frac{x}{z^2}\right) = \ln C$$

se obtiene que su solución es $G(x,y,z) = \dfrac{x}{z^2} = C$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x} &= \mu(x,y,z)\,P(x,y,z) \implies \frac{1}{z^2} = \mu(x,y,z)\,yz \implies \mu(x,y,z) = \frac{1}{yz^3}\\
K(G,y) &= \mu(x,y,z)\,Q(x,y,z) - \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y} = \frac{1}{yz^3}\left(xz + yz^3\right) - 0 = \frac{x}{yz^2} + 1\\
&= \frac{G}{y} + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G + K(G,y)\,\mathrm{d}y = 0 &\implies \mathrm{d}G + \left(\frac{G}{y} + 1\right)\mathrm{d}y = 0 \implies \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} + \frac{G}{y} + 1 = 0\\
&\implies \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} + \frac{G}{y} = -1 \quad \text{que es una ecuación diferencial lineal.}
\end{aligned}$$

La solución general será $G(y) = G_h(y) + G_p(y)$ donde $G_h(y)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} + \dfrac{G}{y} = 0$ y $G_p(y)$ es una solución particular (que determinaremos por el método de variación de la constante). Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} + \frac{G}{y} = 0 &\implies \frac{\mathrm{d}G}{G} + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0 \implies \ln G + \ln y = \ln C\\
&\implies \ln(Gy) = \ln C \implies G_h(y)y = C \implies G_h(y) = \frac{C}{y}
\end{aligned}$$

$$G_p(y) = \frac{C(y)}{y} \implies G_p'(y) = \frac{C'(y)y - C(y)}{y^2}$$

Para que $G_p(y)$ sea una solución particular de $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} + \dfrac{G}{y} = -1$, tendrá que verificar dicha ecuación:

$$G_p'(y) + \frac{G_p(y)}{y} = -1 \implies \underbrace{\frac{C'(y)y - C(y)}{y^2} + \frac{C(y)}{y^2}}_{\dfrac{C'(y)}{y}} = -1$$

$$\implies \frac{C'(y)}{y} = -1 \implies C'(y) = -y \implies C(y) = -\frac{y^2}{2}$$

$$\implies G_p(y) = \frac{C(y)}{y} = \frac{-\dfrac{y^2}{2}}{y} = -\frac{y}{2}$$

Luego la solución de la ecuación lineal es $G(y) = G_h(y) + G_p(y) = \dfrac{C}{y} - \dfrac{y}{2}$ y, sustituyendo el valor conocido de G, obtenemos la solución general de la ecuación de Pfaff $\dfrac{x}{z^2} = \dfrac{C}{y} - \dfrac{y}{2}$.

------ ○ ------

Resolución de EDT. Casos particulares

En el apartado anterior hemos visto un método general para la resolución de EDT. Presentamos ahora unos casos particulares para los cuales no hace falta recurrir a dicho método general.

- **Ecuación en variables separadas**

  Si la ecuación de Pfaff a resolver presenta la forma $P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y + R(z)\,\mathrm{d}z = 0$, entonces $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y + \int R(z)\,\mathrm{d}z = C$ es su solución general. Queda claro que en este caso particular la ecuación es siempre integrable.

- **Ecuación diferencial exacta**

  Si la forma diferencial $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ es exacta (y esto ocurrirá si y sólo si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = 0$), entonces existirá una función $U(x,y,z)$ tal que

  $$\mathrm{d}U(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

  por lo que la ecuación de Pfaff $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = 0$ es equivalente a $\mathrm{d}U(x,y,z) = 0$. Por lo tanto se tendrá que $U(x,y,z) = C$ es la solución general.

- **Ecuación con una variable separada**

  Una ecuación de la forma $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y + R(z)\,\mathrm{d}z = 0$ se dice que está con la variable z separada, es decir, si la función que acompaña a $\mathrm{d}z$ sólo depende de z y esta variable no aparece en el resto de la ecuación. En tal caso, la ecuación es integrable si la forma diferencial $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ es exacta y la solución general de la ecuación de Pfaff viene dada por $U(x,y) + \int R(z)\,\mathrm{d}z = C$ donde $U(x,y)$ es un potencial de dicha forma diferencial.

  De forma análoga se define y se resuelve una ecuación de Pfaff con la variable x o con la variable y separada.

Ejemplo 4.3

Verificar si son integrables las siguientes ecuaciones de Pfaff. En caso afirmativo resolverlas.

(a) $3yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}z = 0$

(b) $2xy\,\mathrm{d}x + \left(x^2+z^2\right)\,\mathrm{d}y + 2zy\,\mathrm{d}z = 0$

(c) $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z = 0$

Solución:

(a) $3yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}z = 0$. Dividiendo por xyz tenemos $\dfrac{3}{x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}y - \dfrac{2}{z}\,\mathrm{d}z = 0$ que es de variables separadas. Por tanto, integrando:

$$3\ln x + \ln y - 2\ln z = \ln C \implies \ln\left(\frac{x^3y}{z^2}\right) = \ln C$$
$$\implies \boxed{\frac{x^3y}{z^2} = C} \quad \text{es la solución general.}$$

(b) $2xy\,\mathrm{d}x + \left(x^2+z^2\right)\,\mathrm{d}y + 2zy\,\mathrm{d}z = 0 \implies \vec{F} = \left(2xy, x^2+z^2, 2zy\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(2xy, x^2+z^2, 2zy\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+z^2 & 2zy \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

$\implies$ exacta.

$$
\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int 2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(y,z) = x^2y + \varphi(y,z) \\
\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} &= Q(x,y,z) \implies x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = x^2 + z^2 \implies \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = z^2 \\
&\implies \varphi(y,z) = yz^2 + \phi(z) \implies U(x,y,z) = x^2y + yz^2 + \phi(z) \\
\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} &= R(x,y,z) \implies 2yz + \phi'(z) = 2zy \implies \phi'(z) = 0 \\
&\implies \phi(z) = 0 \implies U(x,y,z) = x^2y + yz^2 \\
&\implies x^2y + yz^2 = C \quad \text{es la solución general.}
\end{aligned}
$$

(c) $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0$. Esta ecuación de Pfaff tiene una variable separada que es z. La ecuación será integrable si $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ es una forma diferencial exacta y esto es cierto pues $\dfrac{\partial y}{\partial y} = \dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$. El potencial de dicha forma diferencial es:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \int y\,\mathrm{d}x + \phi(y) = xy + \phi(y) \\
\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} &= Q(x,y) \implies x + \phi'(y) = x \implies \phi'(y) = 0 \implies \phi(y) = 0 \\
&\implies U(x,y) = xy
\end{aligned}
$$

Por tanto, $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0 \implies \mathrm{d}U(x,y) + \mathrm{d}z = 0$ e integrando obtenemos la solución general $\displaystyle\int \mathrm{d}U(x,y) + \int \mathrm{d}z = xy + z = C$.

------ o ------

4.3. Ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales

Se llama ecuación en derivadas parciales cuasilineal a una ecuación de la forma

$$P(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \qquad \text{que notaremos} \quad P\,p + Q\,q = R$$

donde supondremos que las funciones P, Q y R son continuas, no se anulan simultáneamente y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en cierto recinto.

Si $R(x,y,z) = 0$ la ecuación recibe el nombre de ecuación en derivadas parciales cuasilineal homogénea .

Solución general

Teorema 2
Toda superficie formada por curvas de la congruencia definida por la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)} \tag{4.3}$$

satisface la ecuación

$$P\,p \;+\; Q\,q \;=\; R \tag{4.4}$$

y recíprocamente, toda superficie integral solución de (4.4) está formada por curvas características de la ecuación (4.3).

Para resolver la ecuación (4.4) se integra previamente la ecuación (4.3), de donde se obtendrá una congruencia de curvas definida por dos integrales primeras independientes

$$\begin{cases} f(x,y,z) = C_1 \\ g(x,y,z) = C_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

La solución general de (4.4) es la familia

$$\varphi\Big(\, f(x,y,z),\; g(x,y,z)\,\Big) = 0 \qquad \text{con } \varphi \text{ función arbitraria} \tag{4.6}$$

En algunas ocasiones, para encontrar las dos relaciones $f = C_1$ y $g = C_2$ habrá que hacer uso de la propiedad compuesta que establece que el sistema característico

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)}$$

se puede igualar también a expresiones de la forma

$$\frac{\alpha(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \beta(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}z}{\alpha(x,y,z)\,P(x,y,z) + \beta(x,y,z)\,Q(x,y,z) + \gamma(x,y,z)\,R(x,y,z)}$$

siendo $\alpha(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ y $\gamma(x,y,z)$ funciones arbitrarias.

El objetivo será encontrar $\alpha(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ y $\gamma(x,y,z)$ tales que

$$\alpha(x,y,z)\,P(x,y,z) + \beta(x,y,z)\,Q(x,y,z) + \gamma(x,y,z)\,R(x,y,z) = 0$$

y, por tanto, $\alpha(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \beta(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}z = 0$ que es una ecuación de Pfaff que una vez resuelta nos proporciona una de las relaciones buscada.

Ejemplo 4.4

Calcular la solución general de $x^2p + y^2q = x^2 + y^2$.

Solución:

$$x^2p + y^2q = x^2 + y^2 \implies \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \implies -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1 \implies \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C_1 \implies f = \frac{x-y}{xy} = C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - \mathrm{d}z}{\underbrace{x^2+y^2-x^2-y^2}_{0}} \implies \mathrm{d}x + \mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0$$

$$\implies x + y - z = C_2 \implies g = x + y - z = C_2$$

Por tanto, la solución general es $\varphi\left(\frac{x-y}{xy}, x+y-z\right) = 0$, φ función arbitraria.

------ o ------

Soluciones particulares

Cuando se busque la solución particular (problema de Cauchy) de la ecuación (4.4) que pasa por una curva Γ dada, definida mediante las ecuaciones

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z) = 0 \tag{4.7}$$

construiremos el sistema formado por las dos ecuaciones (4.7) que definen Γ y las dos ecuaciones (4.5). Al eliminar x , y , z entre estas cuatro ecuaciones se obtendrá la relación que vincula a los parámetros C_1 y C_2, esto es, la forma concreta de la función φ.

Ejemplo 4.5

Hallar la solución particular de la ecuación $yp - xq = xyz^2$ *que contiene a la curva* $x = y = z$.

Solución:

$$yp - xq = xyz^2 \implies \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x} = \frac{\mathrm{d}z}{xyz^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x} \implies x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0 \implies \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = K_1 \implies f = x^2 + y^2 = C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{xyz^2} \implies x\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0 \implies \frac{x^2}{2} + \frac{1}{z} = C_2 \implies g = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{z} = C_2$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & x^2 + y^2 = C_1 \\ (2) & \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{z} = C_2 \\ (3) & x = y = z \end{array} \right\} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} (4) & x^2 + x^2 = C_1 \\ (5) & \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x} = C_2 \end{array} \right\} \overset{(4)}{\Longrightarrow} x^2 = \frac{C_1}{2}$$

$$\implies (6) \quad x = \sqrt{\frac{C_1}{2}} \qquad \text{sustituyendo (6) en (5) :}$$

$$\implies \frac{\frac{C_1}{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{C_1}{2}}} = C_2$$

Una vez obtenida una relación exclusivamente entre constantes, se sustituyen los valores iniciales de estas constantes y operamos para simplificar la expresión obtenida:

$$\frac{\frac{C_1}{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{C_1}{2}}} = C_2 \implies \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{z}$$

$$\implies \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{z}$$

$$\implies \frac{y^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{z}$$

$$\implies \boxed{y^2 + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = x^2 + \frac{4}{z}}$$

------ ○ ------

4.4. Ecuaciones en derivadas parciales no lineales

Nos proponemos ahora resolver la EDP no lineal

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{4.8}$$

buscando una familia de superficies que llamaremos integral completa de la ecuación diferencial.

Método de Lagrange-Charpit

Dada la ecuación (4.8), supongamos que F es derivable respecto a todos sus argumentos y con derivadas F_p', F_q' no simultáneamente nulas, es decir, $|F_p'| + |F_q'| > 0$.

Para obtener una integral completa, es decir, una familia $f(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ biparamétrica de superficies que satisfagan la ecuación (4.8), procederemos según el siguiente método (de Lagrange-Charpit):

- Hallamos una integral $\phi(x, y, z, p, q) = C_1$ del sistema característico

$$\frac{dx}{F_p'} = \frac{dy}{F_q'} = \frac{dz}{pF_p' + qF_q'} = \frac{-dp}{F_x' + pF_z'} = \frac{-dq}{F_y' + qF_z'}$$

- Del sistema de ecuaciones $\begin{cases} \phi(x, y, z, p, q) = C_1 \\ F(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$ despejaremos p y q obteniendo

$$\begin{cases} p = p(x, y, z, C_1) \\ q = q(x, y, z, C_1) \end{cases}$$

- Estas funciones $p = p(x, y, z, C_1)$ y $q = q(x, y, z, C_1)$ las sustituimos en la ecuación $dz = p\,dx + q\,dy$, obteniendo la ecuación de Pfaff integrable

$$dz = p(x, y, z, C_1)\,dx + q(x, y, z, C_1)\,dy$$

cuya solución $f(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ será una integral completa de la ecuación original $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Ejemplo 4.6
Calcular una integral completa de la EDP no lineal $z^3 = pq^2$

Solución:

$$z^3 = pq^2 \implies z^3 - pq^2 = 0 \implies F(x,y,z,p,q) = z^3 - pq^2$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{-q^2} = \frac{\mathrm{d}y}{-2pq} = \frac{\mathrm{d}z}{\underbrace{-pq^2 - 2pq^2}_{-3z^3}} = \frac{-\mathrm{d}p}{3z^2p} = \frac{-\mathrm{d}q}{3z^2q}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{-3z^3} = -\frac{\mathrm{d}p}{3z^2p} \implies \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}z}{z} \implies \ln p = \ln C_1 + \ln z = \ln(C_1 z) \implies p = C_1 z$$

$$z^3 - pq^2 = 0 \implies z^3 - C_1 z q^2 = 0 \implies q^2 = \frac{z^2}{C_1} \implies q = \frac{z}{\sqrt{C_1}}$$

$$\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y \implies \mathrm{d}z = C_1 z\,\mathrm{d}x + \frac{z}{\sqrt{C_1}}\,\mathrm{d}y$$

$$\implies \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = C_1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{C_1}}\,\mathrm{d}y \qquad \text{(variables separadas)} \implies$$

$$\ln z = C_1 x + \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2$$

------ o ------

Casos particulares

En algunos casos, la determinación de una integral completa se puede realizar sin recurrir al método general anterior. Existen varios casos particulares, como por ejemplo:

- Si la ecuación a resolver es de la forma $F(p,q) = 0$, haciendo $q = C$ (ó $p = C$), obtenemos
$$p = \psi(C) \quad \Big(\text{ó } q = \psi(C)\Big)$$
y al sustituir en la ecuación la expresión de $\mathrm{d}z$ se obtiene la ecuación de Pfaff
$$\mathrm{d}z = \psi(C)\,\mathrm{d}x + C\,\mathrm{d}y \qquad \Big(\text{ó } \mathrm{d}z = C\,\mathrm{d}x + \psi(C)\,\mathrm{d}y\Big)$$
que proporciona la integral completa
$$z = x\psi(C) + yC + K \qquad \Big(\text{ó } z = xC + y\psi(C) + K\Big)$$

- Si la ecuación a integrar es de la forma $g_1(x,p) = g_2(y,q)$, despejando p y q del sistema
$$g_1(x,p) = g_2(y,q) = C$$
se obtienen las funciones $p = \varphi_1(x,C)$ y $q = \varphi_2(y,C)$, de donde
$$\mathrm{d}z = \varphi_1(x,C)\,\mathrm{d}x + \varphi_2(y,C)\,\mathrm{d}y$$
e integrando se obtiene una integral completa.

- Si la ecuación a resolver es de la forma $z = px + qy + g(p,q)$, por sustitución directa obtenemos la integral completa $z = C_1x + C_2y + g(C_1,C_2)$.

Ejemplo 4.7
Calcular una integral completa de cada una de las siguientes EDP no lineales:

(a) $p - q^2 = 7$ (b) $px + y = \dfrac{1}{q}$ (c) $zx - px^2 = qxy + \left(p^2 - q\right)x$

Solución:
(a) $p - q^2 = 7$.
Estamos ante el primer caso particular:

$$\begin{aligned} q = C_1 &\implies p = 7 + C_1^2 \\ \mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y &\implies \mathrm{d}z = \left(7 + C_1^2\right)\,\mathrm{d}x + C_1\,\mathrm{d}y \quad \text{(variables separadas)} \\ &\implies z = \left(7 + C_1^2\right)x + C_1\,y + C_2 \end{aligned}$$

(b) $px + y = \dfrac{1}{q} \implies px = \dfrac{1}{q} - y$. Estamos ante el segundo caso particular:

$$px = \frac{1}{q} - y = C_1 \implies p = \frac{C_1}{x} \quad ; \quad q = \frac{1}{y+C_1}$$

$$\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y \implies \mathrm{d}z = \frac{C_1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y+C_1}\,\mathrm{d}y \quad \text{(variables separadas)}$$

$$\implies z = C_1 \ln x + \ln(y+C_1) + C_2$$

(c) $zx - px^2 = qxy + \left(p^2 - q\right)x \implies z = px + qy + p^2 - q$. Estamos ante el tercer caso particular:

$$p = C_1 \quad ; \quad q = C_2 \implies z = C_1 x + C_2 y + C_1^2 - C_2$$

- - - - - - ○ - - - - - -