**Apellidos:** **D.N.I.:**

**Nombre:** **Especialidad y grupo:**

---

# Ampliación de Cálculo de E.P.S.
# Convocatoria de junio (23–06–11)

1. Calcular:

   (a) (0.4 p) $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$

   (b) (0.2 p) $\displaystyle\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)^2(s-2)}{s^2-2s+6}\right]$

2. (a) (0.8 p) Resolver el problema de Cauchy: $\begin{cases}(x+y+2)\,\mathrm{d}x+(2x+2y+4)\,\mathrm{d}y=0\\ y(0)=-2\end{cases}$

   (b) (0.7 p) Resolver la ecuación diferencial: $\displaystyle 3y'+y=\frac{\mathrm{e}^x}{y^2}$ .

3. (a) (0.8 p) Resolver: $y^{IV}+3y''-4y=3\,\mathrm{e}^{2x}-3\,\mathrm{e}^{-x}+\cos x-2\operatorname{sen} x$

   (b) (0.7 p) Resolver **utilizando transformadas de Laplace**: $\begin{cases}y''-2y'+y=x^2\,\mathrm{e}^x\\ y(0)=0\ ;\ y'(0)=2\end{cases}$

4. (a) (0.7 p) Estudiar, dependiendo de los valores de la constante real $\lambda$, si la ecuación

$$y(\lambda x+2z)\,\mathrm{d}x+x(x+z)\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=0$$

   es integrable. Resolverla en caso afirmativo.

   (b) (0.5 p) Encontrar la solución particular de la ecuación $2xp+yq-4z=0$ que contiene a la curva $z=1\ ;\ z=x^2+y^2$.

   (c) (0.3 p) Resolver la ecuación en derivadas parciales: $z+\mathrm{e}^{pq}-qy=px$.

5. (a) (0.6 p) Sabiendo que $\displaystyle u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es la solución de:

$$\begin{cases}a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0<x<L & t>0\\ u(0,t)=0 & u(L,t)=0 & t\geq 0\end{cases}$$

   aplicar las condiciones $u(x,0)=f(x)$ ; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$ con $0<x<L$ para obtener la solución de la ecuación de onda.

   (b) (0.3 p) Utilizando el resultado obtenido en el apartado anterior, resolver la ecuación de onda cuando $L=\pi$ para $f(x)=g(x)=\operatorname{sen} x-2\operatorname{sen}(3x)$.

# SOLUCIÓN

**1. (a)** Recordemos que $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left[F(t)\right]$ siempre que dicha transformada y dicho límite existan.

En este caso,

$$\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left[F(t)\right] = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\,\mathrm{d}x\right] \overset{(*)}{=} \lim_{s\to 0^+}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(s+1)}{2(s+1)}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

ya que $(*)$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{existe}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2x}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} x\right]\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} u\Big]_s^\infty = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg} s\Big) = \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s}{2}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2x}\right]}{s} = \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s}{2s}$$

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{2x}\,\mathrm{d}x\right] = f(s+1) = \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(s+1)}{2(s+1)}$$

------ ○ ------

**1. (b)**

$$\lim_{s\to\infty}\frac{(s-1)^2(s-2)}{s^2-2s+6} = \infty \neq 0$$

Por lo tanto, no existe $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{(s-1)^2(s-2)}{s^2-2s+6}\right]$.

------ ○ ------

**2. (a)** Observemos que como $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, las rectas $x+y+2=0$ y $2x+2y+4=0$ son coincidentes. Así, tenemos:

$$(x+y+2)\,\mathrm{d}x + (2x+2y+4)\,\mathrm{d}y = 0 \implies (x+y+2)\,\mathrm{d}x + 2(x+y+2)\,\mathrm{d}y = 0$$

y, por lo tanto, nos queda

$$(x+y+2)(\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y) = 0 \implies \begin{cases} x+y+2=0 \\ \mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y=0 \end{cases}$$

Integrando la segunda ecuación nos queda $x+2y=C$ como solución general de la ecuación dada.

Observemos que $x+y+2=0$ también verifica la ecuación original y no está incluida en la solución general. Por lo tanto $x+y+2=0$ es una solución singular de la ecuación.

Aplicamos la condición inicial a las soluciones de la ecuación:

$$y(0)=-2 \implies 0+2(-2)=C \implies C=-4 \implies x+2y=-4$$

$$y(0)=-2 \implies 0-2+2=0 \text{ (se verifica)} \implies x+y+2=0 \text{ es solución}$$

Por lo tanto, las dos soluciones de este problema de Cauchy son $x + 2y = -4$ y $x + y + 2 = 0$.

------ ○ ------

**2. (b)** Es una ecuación de Bernouille. Pasamos a resolverla.

Multiplicando toda la ecuación por $y^2$ se obtiene $3y'y^2 + y^3 = \mathrm{e}^x$.

Realizamos el cambio $y^3 = t$, con lo que $3y^2y' = t'$ y, así,

$$t' + t = \mathrm{e}^x$$

que es una ecuación lineal.

Su solución es

$$t = t_h + t_p \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} t_h \quad &\Longrightarrow \quad t' + t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + t = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{t} + \mathrm{d}x = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \ln t + x = \ln C \quad \Longrightarrow \quad t_h = C\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_p = C(x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad &\Longrightarrow \quad \underbrace{C'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - C(x)\,\mathrm{e}^{-x}}_{t'} + \underbrace{C(x)\,\mathrm{e}^{-x}}_{t} = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad C'(x) = \mathrm{e}^{2x} \\ &\Longrightarrow \quad C(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad t_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación lineal es $t = C\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$.

Deshaciendo el cambio realizado nos queda

$$y^3 = C\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$$

------ ○ ------

**3. (a)** La solución de una ecuación de este tipo es $y = y_h + y_p$, donde $y_h$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_p$ es una solución particular de la ecuación dada.

El polinomio característico asociado es $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - 4$. Pasemos a hallar sus raíces:
Tenemos

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\lambda^2\right)^2 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1 \\ \lambda^2 = -4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 2\,i \end{cases}$$

Así, las raíces del polinomio característico son $\lambda = 1$ ; $\lambda = -1$ ; $\lambda = \pm 2\,i$. Por lo tanto, un sistema fundamental de soluciones de la ecuación es $\left\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x)\right\}$ y la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos(2x) + C_4\operatorname{sen}(2x)$$

Siendo $L(D) = D^4 + 3D^2 - 4$, tenemos para el cálculo de la solución particular (utilizando el método operacional):

$$y_p = 3\frac{1}{L(D)}\left[\mathrm{e}^{2x}\right] - 3\frac{1}{L(D)}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] + \frac{1}{L(D)}\left[\cos x\right] - 2\frac{1}{L(D)}\left[\operatorname{sen} x\right]$$

Así,

$$\frac{1}{L(D)}\left[\mathrm{e}^{2x}\right] = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{P(2)} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{24}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L(D)}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] &= \frac{1}{D+1}\frac{1}{D-1}\frac{1}{D^2+4}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] = \frac{1}{D+1}\frac{1}{D-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\right] = \frac{1}{5}\frac{1}{D+1}\frac{1}{D-1}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] \\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{D+1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{-2}\right] = \frac{-1}{10}\frac{1}{D+1}\left[\mathrm{e}^{-x}\right] = \frac{-1}{10}\frac{1}{D+1}\left[\mathrm{e}^{-x}\cdot 1\right] = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{10}\frac{1}{D-1+1}\left[1\right] = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{10}\frac{1}{D}\left[1\right] \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{10}x = \frac{-x\,\mathrm{e}^{-x}}{10}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{L(D)}\left[\cos x\right] = \frac{\cos x}{Q(-1^2)} = \frac{\cos x}{Q(-1)} = \frac{\cos x}{(-1)^2+3(-1)-4} = \frac{\cos x}{-6} \qquad \text{con } Q(E) = E^2+3E-4$$

$$\frac{1}{L(D)}\left[\operatorname{sen} x\right] = \frac{\operatorname{sen} x}{Q(-1^2)} = \frac{\operatorname{sen} x}{Q(-1)} = \frac{\operatorname{sen} x}{(-1)^2+3(-1)-4} = \frac{\operatorname{sen} x}{-6} \qquad \text{con } Q(E) = E^2+3E-4$$

Por lo tanto

$$y_p = 3\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{24} - 3\,\frac{-x\,\mathrm{e}^{-x}}{10} + \frac{\cos x}{-6} - 2\,\frac{\operatorname{sen} x}{-6} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{8} + \frac{3x\,\mathrm{e}^{-x}}{10} - \frac{\cos x}{6} + \frac{\operatorname{sen} x}{3}$$

y así,

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos(2x) + C_4\operatorname{sen}(2x) + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{8} + \frac{3x\,\mathrm{e}^{-x}}{10} - \frac{\cos x}{6} + \frac{\operatorname{sen} x}{3}$$

------ ○ ------

**3. (b)**

$$y'' - 2y' + y = x^2\,\mathrm{e}^x \implies \mathcal{L}\left[y''-2y'+y\right] = \mathcal{L}\left[x^2\,\mathrm{e}^x\right] \implies \mathcal{L}\left[y''\right] - 2\mathcal{L}\left[y'\right] + \mathcal{L}\left[y\right] = \mathcal{L}\left[x^2\,\mathrm{e}^x\right]$$

$$\implies s^2\mathcal{L}\left[y\right] - s\,\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{2} - 2\left(s\mathcal{L}\left[y\right] - \underbrace{y(0)}_{0}\right) + \mathcal{L}\left[y\right] = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$\implies \left(s^2-2s+1\right)\mathcal{L}\left[y\right] = \frac{2}{(s-1)^3} + 2 \implies (s-1)^2\,\mathcal{L}\left[y\right] = \frac{2}{(s-1)^3} + 2$$

$$\implies \mathcal{L}\left[y\right] = \frac{2}{(s-1)^5} + \frac{2}{(s-1)^2} \implies y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^5} + \frac{2}{(s-1)^2}\right]$$

$$\implies y = 2\,\frac{x^4}{4!}\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x = \frac{x^4}{12}\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x$$

------ ○ ------

**4. (a)** $\quad y(\lambda x+2z)\,\mathrm{d}x + x(x+z)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{F} = \Big(y(\lambda x+2z), x(x+z), xy\Big)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(y(\lambda x+2z), x(x+z), xy) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y(\lambda x+2z) & x(x+z) & xy \end{vmatrix} = (0, y, 2x-\lambda x - z)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) &= \Big(y(\lambda x+2z), x(x+z), xy\Big)\cdot(0,y,2x-\lambda x-z) = xy(x+z)+xy\,(2x-\lambda x-z) \\ &= xy\,(x+z+2x-\lambda x-z) = x^2y(3-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación es integrable para $\lambda = 3$ y queda

$$y(3x+2z)\,\mathrm{d}x + x(x+z)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$$

Consideremos $x$ como parámetro constante, con lo que $\mathrm{d}x = 0$. Así,

$$y(3x+2z)\,\mathrm{d}x + x(x+z)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad\Longrightarrow\quad x(x+z)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0 \quad\Longrightarrow\quad (x+z)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = 0$$

que es una ecuación de variables separables.

Separándolas

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{x+z} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ln y + \ln(x+z) = \ln C \quad\Longrightarrow\quad \ln y(x+z) = \ln C$$

se obtiene que su solución es $G(x,y,z) = y(x+z) = C$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y} &= \mu(x,y,z)\,Q(x,y,z) \quad\Longrightarrow\quad x+z = \mu(x,y,z)\,x(x+z) \quad\Longrightarrow\quad \mu(x,y,z) = \frac{1}{x} \\ K(G,x) &= \mu(x,y,z)\,P(x,y,z) - \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{x}y\,(3x+2z) - y = \frac{2y(x+z)}{x} = \frac{2G}{x} \end{aligned}$$

$\mathrm{d}G + K(G,x)\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}G + \dfrac{2G}{x}\,\mathrm{d}x = 0$ que es una ecuación diferencial de variables separables.

Separándolas

$$\frac{\mathrm{d}G}{G} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ln G + 2\ln x = \ln C \quad\Longrightarrow\quad \ln Gx^2 = \ln C$$

se obtiene que su solución es $Gx^2 = C$, y, sustituyendo el valor conocido de $G$, obtenemos que la solución general de la ecuación de Pfaff es $x^2y(x+z) = C$.

------ ○ ------

**4. (b)** $\quad 2xp + yq - 4z = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2xp + yq = 4z \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{2x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{4z}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{2\,\mathrm{d}y}{y} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ln x - 2\ln y = \ln C_1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) = \ln C_1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{y^2} = C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{4z} \quad\Longrightarrow\quad \frac{4\,\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 4\ln y - \ln z = \ln C_2 \quad\Longrightarrow\quad \ln\left(\frac{y^4}{z}\right) = \ln C_2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{y^4}{z} = C_2$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{x}{y^2} = C_1 \\ \\ (2) & \dfrac{y^4}{z} = C_2 \\ \\ (3) & z = 1 \ ; \ z = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (4) & x = C_1 y^2 \\ \\ (5) & y^4 = C_2 \\ \\ (6) & x = \sqrt{1-y^2} \end{array}\right\} \overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad y^2 = \sqrt{C_2} \qquad \text{sustituyendo en (4) :}$$

$$\Longrightarrow \ (8) \quad x = C_1\sqrt{C_2} \qquad \text{sustituyendo (6) y (7) en (8) se tiene :}$$

$$\Longrightarrow \ \sqrt{1-\sqrt{C_2}} = C_1\sqrt{C_2} \quad \Longrightarrow \quad 1-\sqrt{C_2} = {C_1}^2 C_2$$

Una vez obtenida una relación exclusivamente entre constantes, se sustituyen los valores iniciales de estas constantes y operamos para simplificar la expresión obtenida:

$$1-\sqrt{C_2} = {C_1}^2 C_2 \quad \Longrightarrow \quad 1-\sqrt{\frac{y^4}{z}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 \frac{y^4}{z} \quad \Longrightarrow \quad 1-\frac{y^2}{\sqrt{z}} = \frac{x^2}{z} \quad \Longrightarrow \quad z-\sqrt{z}\,y^2 = x^2$$

------ ○ ------

**4. (c)** $z + \mathrm{e}^{pq} - qy = px \quad \Longrightarrow \quad z = px + qy - \mathrm{e}^{pq}$. Estamos ante el tercer caso particular:

$$p = C_1 \quad ; \quad q = C_2 \quad \Longrightarrow \quad z = C_1 x + C_2 y - \mathrm{e}^{C_1 C_2}$$

------ ○ ------

**5. (a)**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)$$

Teniendo en cuenta las condiciones $u(x,0) = f(x)$ y $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$, se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(A_n \underbrace{\cos\left(\frac{an\pi}{L}\,0\right)}_{1} + B_n \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}\,0\right)}_{0}\Bigg)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) = f(x)$$

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)$ es el desarrollo en serie de Fourier de senos en medio intervalo. Por la unicidad de los coeficientes de dicha serie de Fourier se tiene que

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(-A_n\,\frac{an\pi}{L}\,\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right) + B_n\,\frac{an\pi}{L}\,\cos\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right)\Bigg)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(-A_n\,\frac{an\pi}{L}\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}\,0\right)}_{0} + B_n\,\frac{an\pi}{L}\,\underbrace{\cos\left(\frac{an\pi}{L}\,0\right)}_{1}\Bigg)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\frac{an\pi}{L}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) = g(x)
\end{aligned}$$

obteniéndose de nuevo un desarrollo en serie de Fourier de senos en medio intervalo. Por la unicidad de los coeficientes de dicha serie de Fourier, se tiene que:

$$B_n \frac{an\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{con} \\ A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

------ o ------

**5. (b)** Como $L = \pi$ tendremos:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{an\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}t\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{an\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}t\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(ant) + B_n\,\mathrm{sen}(ant)\Big)\,\mathrm{sen}(nx) \qquad \text{con} \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$f(x) = \mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}(3x)$. En este caso no hará falta determinar los coeficientes $A_n$ mediante su fórmula integral pues:

$$f(x) = \mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}(nx) = A_1\,\mathrm{sen}\,x + A_2\,\mathrm{sen}(2x) + A_3\,\mathrm{sen}(3x) + \cdots$$

y por la unicidad de los coeficientes del desarrollo de Fourier se tiene que $A_1 = 1$ , $A_3 = -2$ , $A_n = 0$ para $n \neq 1, 3$.

$g(x) = \mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}(3x)$. En este caso no hará falta determinar los coeficientes $B_n$ mediante su fórmula integral pues:

$$g(x) = \mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} naB_n\,\mathrm{sen}(nx) = aB_1\,\mathrm{sen}\,x + 2aB_2\,\mathrm{sen}(2x) + 3aB_3\,\mathrm{sen}(3x) + \cdots$$

y por la unicidad de los coeficientes del desarrollo de Fourier se tiene que $aB_1 = 1$ , $3aB_3 = -2$ , $naB_n = 0$ para $n \neq 1, 3$, con lo que despejando se obtiene que $B_1 = \dfrac{1}{a}$ , $B_3 = -\dfrac{2}{3a}$ , $B_n = 0$ para $n \neq 1, 3$.

Así, sustituyendo los coeficientes obtenidos en la expresión de $u(x,t)$ tendremos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(ant) + B_n\,\mathrm{sen}(ant)\Big)\,\mathrm{sen}(nx) \\ &= \Big(A_1\cos(at) + B_1\,\mathrm{sen}(at)\Big)\,\mathrm{sen}\,x + \Big(A_3\cos(3at) + B_3\,\mathrm{sen}(3at)\Big)\,\mathrm{sen}(3x) \\ &= \left(\cos(at) + \frac{1}{a}\,\mathrm{sen}(at)\right)\mathrm{sen}\,x + \left(-2\cos(3at) - \frac{2}{3a}\,\mathrm{sen}(3at)\right)\mathrm{sen}(3x) \end{aligned}$$