

Ampliación de Cálculo de la Escuela Politécnica Superior

Relación 3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$(a) \quad y'' - 2y' = 3y \quad (b) \quad y'' + y = -2y' \quad (c) \quad y'' + y' + y = 0$$

$$(d) \quad y^{IV} - 5y'' = 36y \quad (e) \quad y^V = y' \quad (f) \quad y^{VI} - 2y^V + 3y^{IV} + 3y'' - 2y' + y = 4y'''$$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' - 2y' = 3y \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = e^3 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} y'' + y = -2y' \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = e^{-1} \end{cases}$$

3. Dados los conjuntos de funciones siguientes:

$$(I) \quad \{xe^{3x}, e^{3x}, e^{3x}\cos(-3x)\} \quad (II) \quad \{x^7, x^2e^x, 0\}$$

$$(III) \quad \{x^3\cos(2x), x\sin x \cos x\} \quad (IV) \quad \{x^2e^{3x}, e^{-x}, -xe^x\cos(-2x)\}$$

- (a) ¿Cuál es el orden mínimo de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga, entre otras, como soluciones particulares los conjuntos anteriores?.
- (b) Construir dichas ecuaciones diferenciales de orden mínimo.
- (c) Dar un conjunto fundamental de soluciones en cada caso.
- (d) Resolver las ecuaciones diferenciales resultantes.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el *método de Lagrange (variación de las constantes)* para la solución particular:

$$(a) \quad y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2} \quad (b) \quad y''' + y' = \cos x$$

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el *método operacional* para la solución particular:

$$(a) \quad y'' + 4y = e^{2x} \quad (b) \quad y'' - 4y' + 4y = 6x^2e^{2x} \quad (c) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$$

$$(d) \quad y^{IV} - y = e^x \quad (e) \quad y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2} \quad (f) \quad y'' + y = x^2 - x + 2$$

$$(g) \quad y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x} \quad (h) \quad y^{IV} - y = 3\cos(2x) \quad (i) \quad y'' + 9y = \sin x - 2\cos x$$

$$(j) \quad y''' - y = \sin x \quad (k) \quad y'' + y = \cos x \quad (l) \quad y''' + y' = \cos x$$

$$(m) \quad y''' + 8y = \sin(2x) \quad (n) \quad y''' + 8y = \cos(2x)$$

6. Resolver los siguientes problemas de Cauchy utilizando transformadas de Laplace:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' + 2y = 3y' \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

7. Resolver los siguientes sistemas utilizando transformadas de Laplace:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \\ x(0) = -1; y(0) = 2 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} x'' + y' = 2 \\ 4x + y' = 6 \\ x(0) = 3; x'(0) = 0; y(0) = 0 \end{cases}$$

Problemas Propuestos

8. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$(a) \quad \pi y'' = ey \quad (b) \quad y'' - y' = -y \quad (c) \quad y'' + 2y = 3y' \quad (d) \quad y^{IV} - 11y''' + 41y'' + 30y = 61y'$$

$$(e) \quad y^{IV} = y \quad (f) \quad \pi y'' = -ey \quad (g) \quad y^{IV} + 8y'' = -16y \quad (h) \quad y^{VI} + 2y^{IV} + y'' = 0$$

9. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = -1 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} y'' = y \\ y(1) = e \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

10. Dados los conjuntos de funciones siguientes:

$$(I) \quad \{e^x, -xe^{-x}, 0\} \quad (II) \quad \{x \cos x, xe^{3x}, e^{3x}, -\sin x\} \quad (III) \quad \{x, x^2 e^x, -x^2\}$$

$$(IV) \quad \{2e^x, -e^{-x}, \cos x, -\sin x\} \quad (V) \quad \{x^3, e^x \cos(-2x), xe^x \sin(2x)\} \quad (VI) \quad \{xe^{2x}, 0, x \sin(3x)\}$$

(a) ¿Cuál es el orden mínimo de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga, entre otras, como soluciones particulares los conjuntos anteriores?.

(b) Construir dichas ecuaciones diferenciales de orden mínimo.

(c) Dar un conjunto fundamental de soluciones en cada caso.

(d) Resolver las ecuaciones diferenciales resultantes.

11. Construir una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden mínimo que tenga, entre otras, las funciones $2e^x$, $7x$, $\sin x$, $-x \cos x$ como soluciones particulares. Hallar la solución general de dicha ecuación diferencial.

12. Construir una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden mínimo que tenga, entre otras, las funciones x^2 , $7x + 3$, xe^x como soluciones particulares. Hallar la solución general de dicha ecuación diferencial.

13. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método que se crea más conveniente para el cálculo de la solución particular:

$$(a) \quad y''' + y' = x^3 \quad (b) \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$$

$$(c) \quad y^{IV} - y = \cos x - e^x \quad (d) \quad y^{VI} - y'' = \cos(3x) + e^x - e^{2x}$$

$$(e) \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1} \quad (f) \quad y''' - y'' - y' + y = 7$$

$$(g) \quad y'' + y = x^2 + 13e^{5x} \quad (h) \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

- (i) $y^V - 81y' = \cos(2x) + 2e^{3x} - 5e^x$ (j) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos x + 3x - 1$
- (k) $y^{VI} - y'' = \sin(2x) + 3e^{2x} - e^x$ (l) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
- (m) $y'' + y' - 2y = \sin x$ (n) $y'' + 4y = \sin(2x)$

14. Resolver la ecuación diferencial $y^{IV} - y = 8e^x$.

15. Resolver los siguientes problemas de Cauchy utilizando transformadas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} y'' + 2y' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} y'' + 2y = 3y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} y'' + 2y' = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \\
 \text{(d)} \quad \begin{cases} y^{IV} - 11y''' + 41y'' + 30y = 61y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases} & \text{(e)} \quad \begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} y'' + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

16. Resolver los siguientes sistemas utilizando transformadas de Laplace:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 3y - 2x \\ x(0) = 1; y(0) = 1 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} 2x' + y' - 2x = 1 \\ x' + y' - 3x - 3y = 2 \\ x(0) = 0; y(0) = 0 \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} y + z = 1 \\ y'' - z' = 0 \\ y(0) = 1; y'(0) = -2; z(0) = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones

8. (a) $y = C_1 e^{\sqrt{\frac{e}{\pi}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{e}{\pi}}x}$
- (b) $y = e^{\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$
- (c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
- (d) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{5x}$
- (e) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$
- (f) $y = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{e}{\pi}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{e}{\pi}}x\right)$
- (g) $y = (C_1 x + C_2) \cos(2x) + (C_3 x + C_4) \sin(2x)$
- (h) $y = C_1 x + C_2 + (C_3 x + C_4) \cos x + (C_5 x + C_6) \sin x$

9. (a) $y = \sin x$ (b) $y = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{2-x}}{2}$

10. (I) (a) orden 3 (b) $y''' + y'' - y' - y = 0$
- (c) $\{e^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$ (d) $y = C_1 e^x + (C_2 x + C_3) e^{-x}$

(II) (a) orden 6 (b) $y^{VI} - 6y^V + 11y^{IV} - 12y''' + 19y'' - 6y' + 9y = 0$

- (c) $\{e^{3x}, xe^{3x}, \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x\}$
- (d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + (C_3 x + C_4) \cos x + (C_5 x + C_6) \sin x$
- (III) (a) orden 6 (b) $y^{VI} - 3y^V + 3y^{IV} - y''' = 0$
- (c) $\{1, x, x^2, e^x, x e^x, x^2 e^x\}$
- (d) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) e^x$
- (IV) (a) orden 4 (b) $y^{IV} - y = 0$
- (c) $\{e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$ (d) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$
- (V) (a) orden 8 (b) $y^{VIII} - 4y^{VII} + 14y^{VI} - 20y^V + 25y^{IV} = 0$
- (c) $\{1, x, x^2, x^3, e^x \cos(2x), x e^x \cos(2x), e^x \sin(2x), x e^x \sin(2x)\}$
- (d) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^x ((C_5 x + C_6) \cos(2x) + (C_7 x + C_8) \sin(2x))$
- (VI) (a) orden 6 (b) $y^{VI} - 4y^V + 22y^{IV} - 72y''' + 153y'' - 324y' + 324y = 0$
- (c) $\{e^{2x}, x e^{2x}, \cos(3x), x \cos(3x), \sin(3x), x \sin(3x)\}$
- (d) $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 x + C_4) \cos(3x) + (C_5 x + C_6) \sin(3x)$
11. $y^{VII} - y^{VI} + 2y^V - 2y^{IV} + y''' - y'' = 0$.
Solución: $y = C_1 e^x + C_2 x + C_3 + C_4 x \cos x + C_5 \cos x + C_6 x \sin x + C_7 \sin x$
12. $y^V - 2y^{IV} + y''' = 0$. Solución: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$
13. (a) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + 6$
- (b) $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right) e^{-2x}$
- (c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{x \sin x}{4} - \frac{x e^x}{4}$
- (d) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x - \frac{\cos(3x)}{720} + \frac{x e^x}{4} - \frac{e^{2x}}{60}$
- (e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) - e^{-x}$
- (f) $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) e^x + 7$
- (g) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2 + \frac{e^{5x}}{2}$
- (h) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln(\sin x)$
- (i) $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x} + C_4 \cos(3x) + C_5 \sin(3x) - \frac{\sin(2x)}{130} + \frac{x e^{3x}}{162} + \frac{e^x}{16}$

$$(j) \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{\cos x}{5} - \frac{\sin x}{10} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$(k) \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x - \frac{\sin(2x)}{60} + \frac{e^{2x}}{20} - \frac{x e^x}{4}$$

$$(l) \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x$$

$$(m) \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{\cos x}{10} - \frac{3 \sin x}{10}$$

$$(n) \quad y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{x \cos(2x)}{4}$$

$$14. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + 2x e^x$$

$$15. \quad (a) \quad y = x e^{-x} \quad (b) \quad y = e^{2x} - e^x \quad (c) \quad y = -\frac{3}{8} e^{-2x} + \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{4} \quad (d) \quad y = 0 \quad (e) \quad y = e^{-x} \left(1 + 3x + \frac{x^3}{6} \right)$$

$$(f) \quad y = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$16. \quad (a) \quad x = e^t; y = e^t \quad (b) \quad x = -\frac{1}{2} - 2e^{3t} + \frac{5}{2} e^{2t}; y = -\frac{1}{6} + \frac{8}{3} e^{3t} - \frac{5}{2} e^{2t}$$

$$(c) \quad y = -1 + 2e^{-t}; z = 2 - 2e^{-t}$$