Ejemplos (pg 2)

$$y'(x) = 2x\,y(x)$$

comprobamos que $y(x) = e^{x^2}$ cumple la E.D.O

$$y'(x) = 2xe^{x^2} \longrightarrow \frac{2xe^{x^2}}{y'(x)} = 2xe^{x^2}$$

$$y' + 2xy = x$$

$$y(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{2} \longrightarrow y'(x) = -2xe^{-x^2} \Big| \underbrace{-2xe^{-x^2}}_{y'(x)} + 2x\underbrace{\left(e^{-x^2} + \frac{1}{2}\right)}_{y(x)}x$$

Ecuaciones de variables separadas.

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad x^2 + 5y^4 y' = 0 \longrightarrow x^2 + 5y^4 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{x^2dx + 5y^4\,dy = 0}_{\text{Esto es lo que se llama VARIABLES SEPARADAS.}} \longrightarrow \text{Ejemplo 2.2}$$

Método de Resolución.

$$\int x^2dx + \int 5y^4\,dy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} + y^5 = C \longrightarrow y^5 = C - \frac{x^3}{3}$$

RESOLUCIÓN DE EDO DE PRIMER ORDEN

Ecs de variables separadas

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \longrightarrow \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Ecs dependientes de una recta

$$y' = f(ax+by+c) \quad a,b,c \in \mathbb{R} \longrightarrow dy = f(ax+by+c)dx$$

Haciendo el cambio:

$$z = ax+by+c \; ; \; dz = a\,dx + b\,dy$$

se convierte en ec. de variables separables

Ecs homogéneas: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Es homogénea si $f(ax,ay) = a^m f(x,y)$ $\quad a = cte$ y grado $= m$

entonces:

$$P(ax,ay) = a^m P(x,y) \quad y \quad Q(ax,ay) = a^m Q(x,y)$$

Hacemos el cambio

$$y = tx \; ; \; dy = t\,dx + x\,dt$$

Ecs dependientes de dos rectas

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

1. Rectas coincidentes

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Dividiendo por $ax+by+c=0$ → variables separables

2. Rectas paralelas

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

cambio $t = ax+by$, $dt = a\,dx + b\,dy$ → variables separables

3. Rectas secantes

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

se cortan en el punto (x_0, y_0)

$x = u + x_0 \rightarrow dx = du$
$y = v + y_0 \quad\; dy = dv$ } Homogéneo en variables u, v

Ecs exactas:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ → existe $U(x,y)$ de modo que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad y \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

se dice que $U(x,y)$ es potencial.

Ecs de factor integrante

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

posee un factor si $\exists$ la función $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0 \rightarrow \text{es exacta.}$$

Trucos:

$\underline{\mu(t) = t^p}$ $\quad \mu'(t) = pt^{p-1}$

$$\boxed{\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{pt^{p-1}}{t^p} = \frac{p}{t}}$$

$\boxed{\mu'(t) = \mu(t) = e^x}$ $\rightarrow$ la exponencial

$\boxed{\mu(t) = \ln t}$ $\quad \boxed{\mu'(t) = \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} = \frac{1}{\mu(t)\cdot t}}$

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = c \rightarrow \mu(t) = e^{ct}$$

Ecs lineales

$$y' + y(Q(x)) = P(x) \rightarrow (P(x) - y(Q(x)))\,dx - dy = 0$$

admite factor integrante $\mu = \mu(x)$

Ecs Bernouille

$$y' + Q(x)y = P(x)y^n$$

1. dividimos por y^n
2. $z = \frac{1}{y^{n-1}}$

Quedará lineal en x, z

Ecs Riccati

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

Es necesario conocer (al menos) una solución particular y_p de la ecuación.

cambio $y = z + y_p \rightarrow$ se reduce a Bernouille

Ecs de primer orden y de grado n con respecto y'

$$(y')^n + P_1(x,y)(y')^n + \dots + P_{n-1}(x,y)\,y' + P_n(x,y) = 0$$

Despejamos y', tendremos n soluciones