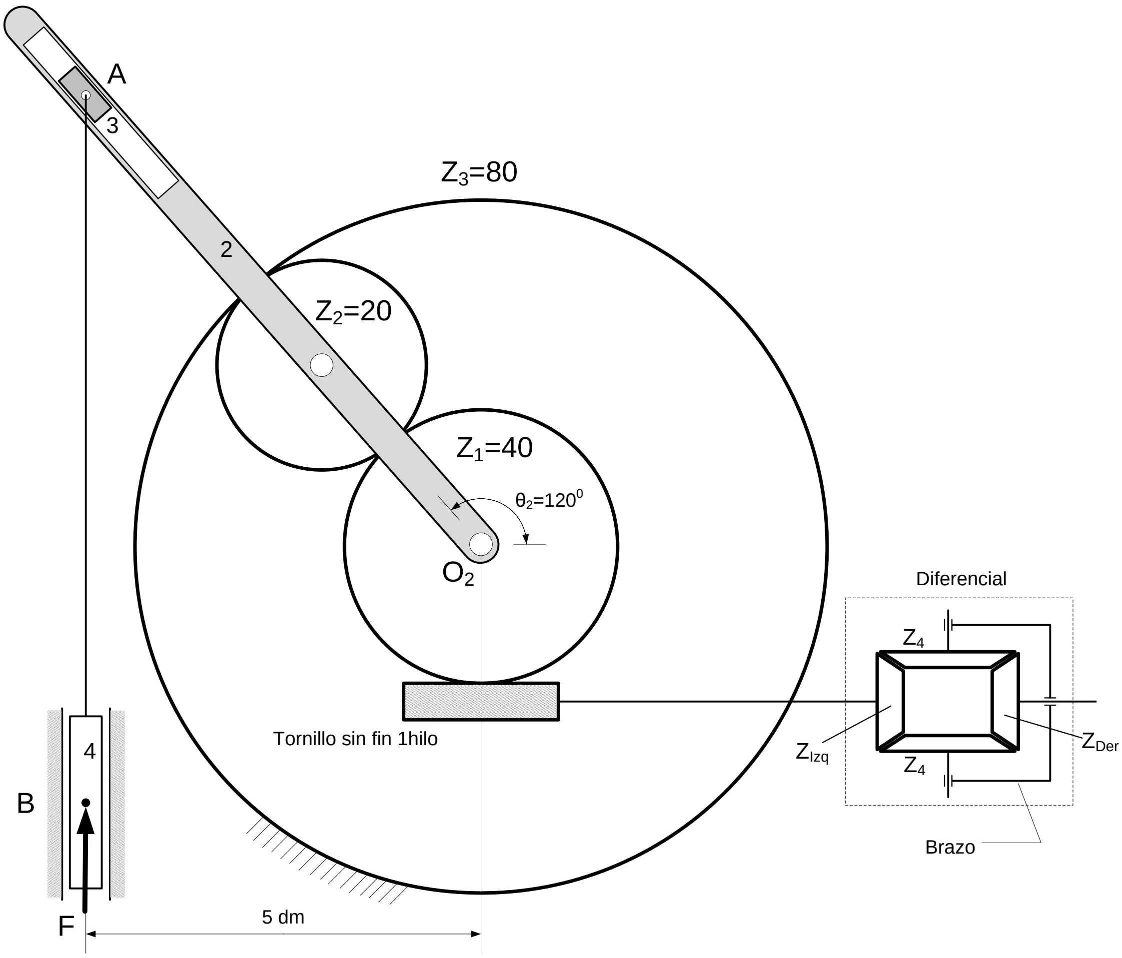
PROBLEMA Nº1.

El mecanismo de la figura se compone de un diferencial que transmite el movimiento a un tren de engranaje epicicloidal mediante un tornillo sin fin. El brazo de este tren de engranaje es el eslabón 2 de un mecanismo para bombear agua, formado además por las deslizaderas 3 y 4. Se pide:

1) Determinar la velocidad angular ω_2 del eslabón 2 del mecanismo de bombear agua, si en el instante indicado el brazo del diferencial está girando a 300 rad/s en sentido de las agujas del reloj visto desde la derecha y el engranaje Z_{Der} está bloqueado. (***1.5 puntos***)
2) Determinar el vector de velocidad lineal del punto B, por el método de velocidades relativas. (***1 punto***)
3) Determinar el vector aceleración lineal del punto B. (***1.5 puntos***)
4) Determinar el vector de velocidad lineal del punto B por método de los C.I.R., conociendo la velocidad lineal del punto A_2 del eslabón motor, dejando el resultado expresado en función de la velocidad de A_2. (**1** ***punto***)
5) Encontrar las expresiones analíticas de las incógnitas cinemáticas de posición por medio de la ecuación de cierre de Raven. En un dibujo indicar todas las variables que aparecen en la ecuación. Además indicar cuales de dichas variables son en este caso las incógnitas, si consideramos como entrada el eslabón 2. **No derivar**. (**0.5** ***punto***)
6) Calcular el valor del par equilibrante en el eslabón 2, planteando el equilibrio de cada eslabón, cuando en el instante indicado se esta ejerciendo una fuerza externa, F_{ext}, en el punto B que lleva la dirección y sentido indicada en la figura. (***1.5 puntos***)



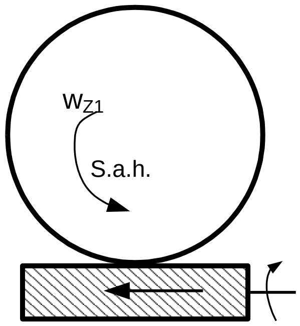
1) Para determinar la velocidad angular ω_2 del brazo (2) del mecanismo, comenzamos calculando la velocidad angular del tornillo sin fin, que es la misma que la del engranaje Z_{izq} del diferencial, por tanto en el diferencial tenemos:

$$\frac{\omega_{Zder} - \omega_{bd}}{\omega_{Zizq} - \omega_{bd}} = -\frac{Z_{izq}}{Z_{der}} = -1$$

Y como se indica en el enunciado ω_{bd}=+300 rad/s y ω_{Zder}=0, con lo cual nos queda:

$$\frac{0-300}{\omega_{Zizq}-300}=-1 \quad \Rightarrow \quad -300=-\omega_{Zizq}+300 \quad \Rightarrow \omega_{Zizq}=+600\,\frac{rad}{s}$$

Una vez tenemos la velocidad angular del tornillo sin fin, podemos calcular la velocidad angular del engranaje 1:



$$\frac{\omega_{Tor}}{\omega_{Z1}}=\frac{Z_1}{Z_{Tor}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{Tor}}{\omega_{Z1}}=\frac{40}{1} \quad \Rightarrow \quad \omega_{Z1}=\frac{600}{40}=15\,\frac{rad}{s}$$

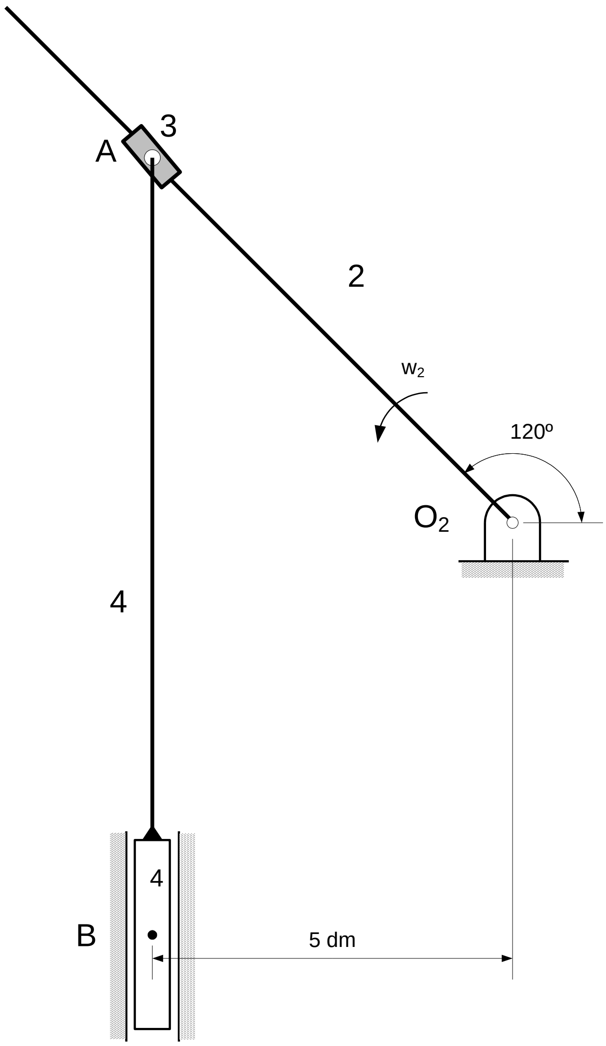
Con lo cual la velocidad angular del engranaje 1 del tren epicicloidal cuyo brazo es el eslabón de entrada del mecanismo de bomba, vale 15 rad/s y su sentido es el contrario a las agujas del reloj. Y para terminar calculamos la velocidad angular del brazo (2) del tren de engranajes epicicloidal formado por los engranajes Z_1, Z_2 y Z_3:

$$\frac{\omega_{Z1}-\omega_2}{\omega_{Z3}-\omega_2}=-\frac{Z3}{Z1}=-\frac{80}{40}$$

Pero según el enunciado la corona 3 está bloqueada, por tanto tenemos:

$$\frac{+15-\omega_2}{0-\omega_2}=-2 \quad \Rightarrow \quad 15-\omega_2=2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2=\frac{15}{3}=+5\,\frac{rad}{s}$$

2) Una vez tenemos la velocidad angular del eslabón de entrada 2, se procede al cálculo de la velocidad del punto B, para ello nos fijamos en el esquema cinemático del mecanismo:



Como la velocidad angular que conocemos es del eslabón 2, situamos en este, un punto que en ese instante coincide con el punto A del eslabón 3, a este punto lo llamamos A_2 y su velocidad viene determinada por:

$$\vec{V}_{A2}=\vec{\omega}_2 \wedge \overline{O_2A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ O_2A\cos 120º & O_2A\text{sen}120º & 0 \end{vmatrix}$$

Para calcular la velocidad del punto A_3, utilizamos el método de las velocidades relativas con la siguiente ecuación:

$$\vec{V}_{A3}=\vec{V}_{A2}+\vec{V}_{A3A2} \qquad (1)$$

De la ecuación anterior conocemos:

$$O_2A=\frac{5}{\cos 60º}=10$$

$$\vec{V}_{A2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ 10\cos 120º & 10\text{sen}120º & 0 \end{vmatrix}=-43.3\vec{i}-25\vec{j}$$

La velocidad relativa V_{A3A2} lleva la dirección de la barra 2, por tanto:

$$\vec{V}_{A3A2}=V_{A3A2}\ \cos 120º\,\vec{i}+sen120º\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_{A3A2}=-0.5V_{A3A2}\vec{i}+0.866V_{A3A2}\vec{j}$$

Como el punto A_3 pertenece al eslabón 4 y todos los puntos de este eslabón tienen solo movimiento vertical, por tanto la velocidad del punto A_3 es:

$$\vec{V}_{A3} = V_{A3}\vec{j}$$

De la ecuación (1) despejando en componentes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$0 = -43.3 - 0.5V_{A3A2} \quad \Rightarrow \quad V_{A3A2} = \frac{43.3}{-0.5} = -86.6\,\frac{dm}{s}$$

$$V_{A3} = -25 + 0.866V_{A3A2} \quad \Rightarrow \quad V_{A3} = -100\,\frac{dm}{s}$$

Los valores definitivos de velocidad son:

$$\vec{V}_{A3A2} = 43.3\vec{i} - 75\vec{j}$$

$$\vec{V}_{A3} = \vec{V}_B = -100\vec{j}$$

3) Para calcular la aceleración se procede con el mismo esquema que se planteó la velocidad, es decir:

$$\vec{A}_{A3} = \vec{A}_{A2} + \vec{A}_{A3A2} \qquad (2)$$

Donde los valores de cada aceleración son:

$$\vec{A}^{n}_{A2} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{V}_{A2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ -43.3 & -25 & 0 \end{vmatrix} = 125\vec{i} - 216.5\vec{j}$$

$$\vec{A}^{t}_{A2} = \vec{\alpha}_2 \wedge \overrightarrow{O_2A} = 0$$

Para la aceleración relativa tendremos los siguientes términos:

$$\vec{A}^{n}_{A3A2} = 0$$

$$\vec{A}^{t}_{A3A2} = A^{t}_{A3A2}\left(\cos 120^{\circ}\vec{i} + sen 120^{\circ}\vec{j}\right) = -0.5A^{t}_{A3A2}\vec{i} + 0.866A^{t}_{A3A2}\vec{j}$$

$$\vec{A}^{c}_{A3A2} = 2\left(\vec{\omega}_2 \wedge \vec{V}_{A3A2}\right) = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ 43.3 & -75 & 0 \end{vmatrix} = 750\vec{i} + 433\vec{j}$$

Por último la aceleración del punto A_3, tiene solo componente vertical y por tanto vale:

$$\vec{A}_{A3} = A_{A3}\vec{j}$$

De la ecuación (2) despejando en componentes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

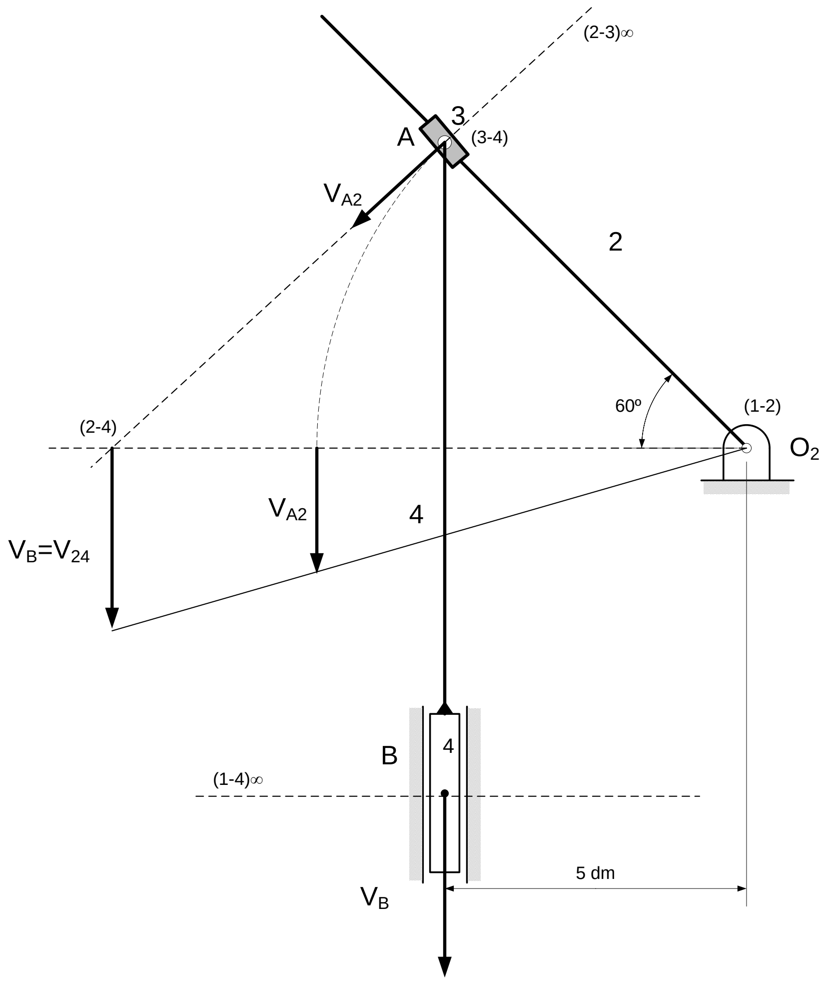
$$0 = 125 - 0.5A^{t}_{A3A2} + 750 \quad \Rightarrow \quad A^{t}_{A3A2} = \frac{-875}{-0.5} = 1750\,\frac{dm^2}{s}$$

$$A_{A3} = -216.5 + 0.866A^{t}_{A3A2} + 433 \quad \Rightarrow \quad A_{A3} = 1732\,\frac{dm^2}{s}$$

Los valores definitivos de la aceleración del punto B son:

$$\vec{A}_{A3} = \vec{A}_B = 1732\vec{j}$$

4) Para el cálculo de la velocidad del punto B por el método de los centros instantáneos de rotación, tenemos que tener en cuenta que la velocidad conocida es la del punto A_2 que pertenece al eslabón 2 y la velocidad que queremos conocer pertenece al eslabón 4, por tanto solo tenemos la terna {1, 2, 4}, y los centros instantáneos que debemos calcular son: (1-2), (1-4) y (2-4). (ver dibujo)



Partimos de la velocidad conocida del punto A_2, cuyo valor es:

$$V_{A2} = \omega_2 \cdot \overline{O_2 A} = 5.10 = 50\ \frac{dm}{s}$$

Ahora calculamos la velocidad del CIR 2-4, como perteneciente al eslabón 2:

$$V_{24} = \omega_2 \cdot \overline{12-24}$$

Pero la distancia $\overline{12-24}$, es fácil de calcular y vale:

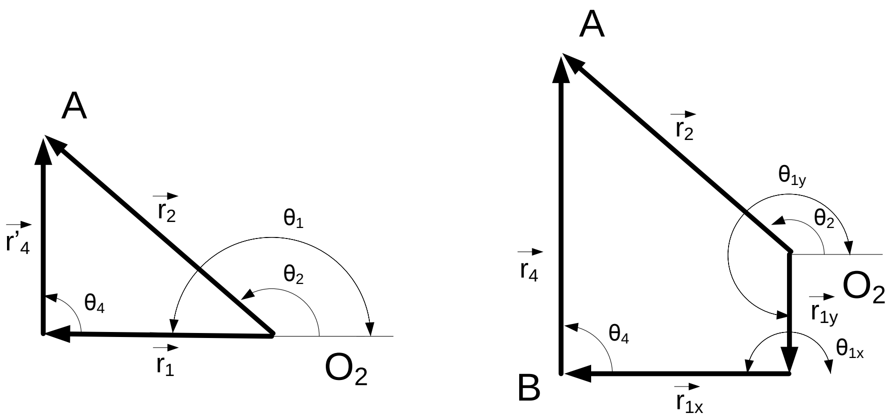
$$\overline{12-24} = \frac{0_2 A}{\cos 60^{o}} = 20\ dm$$

Y como el CIR 2-4 también es un punto del eslabón 4 y todos los puntos de 4 tienen la misma velocidad (traslación pura), tenemos:

$$V_B = V_{24} = \omega_2 \cdot \overline{12-24} = 5 \cdot 20 = 100\ \frac{dm}{s}$$

La dirección y sentido de la velocidad del punto B se observa en el dibujo.

5) Como tenemos 4 eslabones solo tenemos que utilizar una ecuación de cierre para determinar las variables. Existen varias posibilidades para determinar estas variables, en este ejemplo se utilizarán dos ecuaciones de cierre que nos llevan al mismo resultado:



Para la figura de la izquierda tendremos la siguiente ecuación de cierre:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4^{\,'}$$

Que si la ponemos en forma exponencial compleja:

$$r_2 e^{\theta_2} = r_1 e^{180°} + r_4^{'} e^{90°}$$

Donde los datos conocidos son: r_1 y θ_2 (eslabón motor) y las incógnitas r_2 y r'_4, las cuales podemos obtener de las siguientes ecuaciones:

$$r_2 \mathrm{sen}\theta_2 = 0 + r_4^{'} \quad \rightarrow \quad r_4^{'} = r_2 sen\theta_2$$

$$r_2 \cos\theta_2 = -r_1 \rightarrow \quad r_2 = -\frac{r_1}{\cos\theta_2}$$

Si utilizamos la figura de la derecha tenemos en cambio la siguiente ecuación de cierre:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{1y} + \vec{r}_{1x} + \vec{r}_4$$

Que si la ponemos en forma exponencial compleja:

$$r_2 e^{\theta_2} = r_{1y} e^{270°} + r_{1x} e^{180°} + r_4 e^{90°}$$

Donde los datos conocidos son: r_4 (longitud eslabón 4 desde A hasta B siempre es la misma) , r_{1x} y θ_2 (eslabón motor) y las incógnitas r_2 y r_{1y}, las cuales podemos obtener de las siguientes ecuaciones:

$$r_2 \mathrm{sen}\theta_2 = -r_{1y} + r_4 \quad \rightarrow \quad r_{1y} = r_4 - r_2 sen\theta_2$$

$$r_2 \cos\theta_2 = -r_{1x} \rightarrow \quad r_2 = -\frac{r_{1x}}{\cos\theta_2}$$

6) Para calcular el par equilibrante en el eslabón de entrada 2, empezamos estableciendo el equilibrio del eslabón 4 y 3. Como se observa en la figura, en el eslabón 3 solo existen 2 fuerzas la que hace el eslabón 2 sobre el 3, $\vec{F}_{23}$, esta fuerza pasa por A (enlace) y la fuerza $\vec{F}_{34}$, que es perpendicular a la barra 2, por tanto estas dos fuerza deben ser iguales y de sentido contrario.

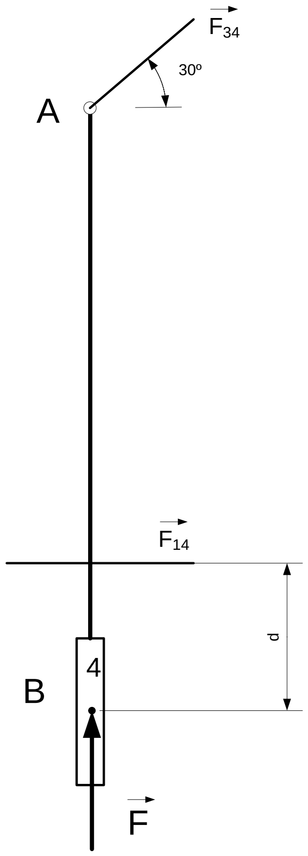
En el eslabón 4 existen tres fuerzas: $\vec{F}_{34}$, que como sabemos por el eslabón 3 lleva la dirección indicada en la figura, pero no conocemos su módulo, la fuerza $\vec{F}_{14}$, que tiene que ser perpendicular al eslabón 4, pero que no conocemos su punto de aplicación, ya que si esta fuerza pasa por B, no se cumple que la suma de momentos en el eslabón es igual a cero. Por tanto aplicando en este eslabón las condiciones de equilibrio y utilizando la ecuación de equilibrio de fuerzas, cuya solución se muestra en el dibujo, obtenemos el valor de $\vec{F}_{34}$.

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}_{34} + \vec{F}_{14} + \vec{F} = 0$$

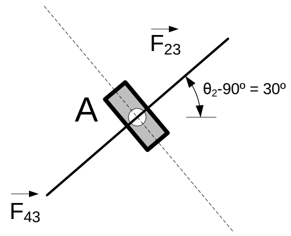
También se puede hallar $\vec{F}_{34}$, de forma analítica, aplicando:

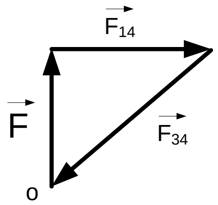
$$\sum \vec{F_y} = 0 \rightarrow F_{34} sen30^{\circ} = F \quad \Rightarrow \quad F_{34} = \frac{F}{0.5}$$

Eslabón 4:



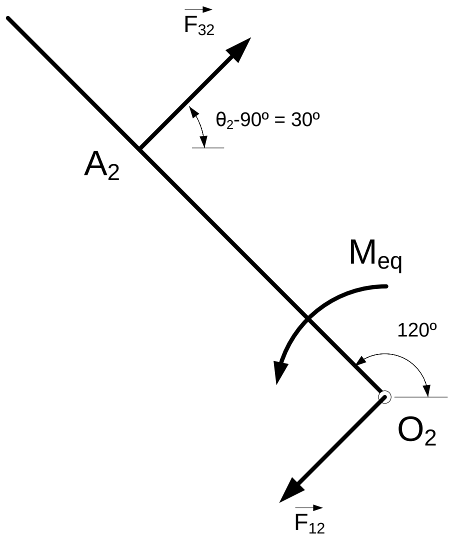
Eslabón 3:





Una vez se ha calculado $\left|\vec{F}_{34}\right| = \left|\vec{F}_{43}\right| = \left|\vec{F}_{23}\right| = \left|\vec{F}_{32}\right|$, estudiamos el equilibrio del eslabón 2:

Eslabón 2:

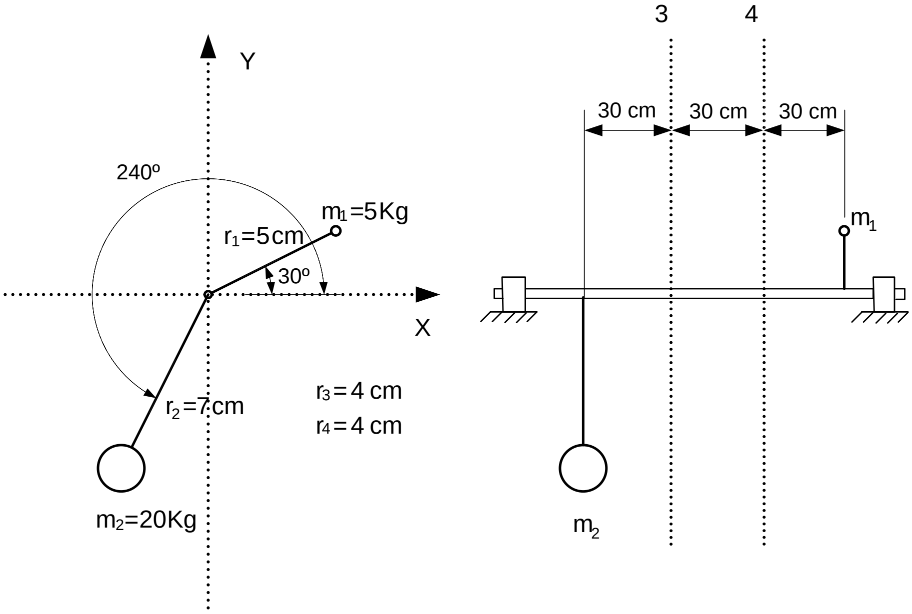


Y el valor del par equilibrante vale aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow F_{12} = F_{32} = \frac{F}{0.5}$$
$$\sum M_{O2} = 0 \rightarrow M_{eq} = F_{32} \cdot O_2A = 5 \cdot F$$

PROBLEMA Nº2.

Las masas m_1 y m_2 del rotor desequilibrado de la figura rotan en planos transversales al eje, estando dicho eje apoyado en sendos rodamientos. Determinar las masas m_3 y m_4 que habría que colocar en los planos 3 y 4 para que el eje estuviese en equilibrio dinámico. Mostrar la posición angular correcta de m_3 y m_4 con respecto a la dirección del eje de abcisas y positivo en sentido antihorario. (***2 puntos***)



Para resolver este problema, podemos plantear las ecuaciones de equilibrio dinámico de fuerzas y momentos analíticamente. Estas ecuaciones serían:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 5 \cdot \cos 30º + 20 \cdot 7 \cdot \cos 240º + 4 \cdot m_3 \cdot \cos\theta_3 + 4 \cdot m_4 \cdot \cos\theta_4 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 5 \cdot \operatorname{sen} 30º + 20 \cdot 7 \cdot \operatorname{sen} 240º + 4 \cdot m_3 \cdot \operatorname{sen}\theta_3 + 4 \cdot m_4 \cdot \operatorname{sen}\theta_4 = 0$$

Y si tomamos momentos de las fuerzas de inercia en el plano 3, tenemos las dos siguientes ecuaciones:

$$\sum M_X = 0 \Rightarrow \quad 60 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \operatorname{sen} 30º + 30 \cdot 4 \cdot m_4 \cdot \operatorname{sen}\theta_4 - 30 \cdot 20 \cdot 7 \cdot \operatorname{sen} 240º = 0$$
$$\sum M_Y = 0 \Rightarrow \quad 60 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 30º + 30 \cdot 4 \cdot m_4 \cdot \cos\theta_4 - 30 \cdot 20 \cdot 7 \cdot \cos 240º = 0$$

De estas dos ecuaciones podemos obtener los valores de m_4 y de θ_4:

$$\left.\begin{array}{l} 120 \cdot m_4 \cdot \operatorname{sen}\theta_4 = -4387.31 \\ 120 \cdot m_4 \cdot \cos\theta_4 = -3399.04 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta_4 = \frac{-4387.31}{-3399.04} \quad \Rightarrow \quad \theta_4 = 232.23º,\ m_4 = 46.25\ Kg$$

Y de las dos primeras obtenemos los valores de m_3 y θ_3:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot m_3 \cdot \cos\theta_3 = 161.66 \\ 4 \cdot m_3 \cdot \operatorname{sen}\theta_3 = 254.98 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta_3 = \frac{+254.98}{+161.66} \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = 57.62º,\ m_3 = 75.47\ Kg$$

Este problema también se puede resolver de forma gráfica, planteando las mismas ecuaciones anteriores.

CUESTIONES TEÓRICAS. (1 punto)

1. En el mecanismo de cuatro barras, la ventaja mecánica es máxima cuando:
(a) la razón de las longitudes de la manivela y el balancín es la unidad.
(b) la razón de las longitudes del acoplador y el balancín es la unidad.
(c) la razón de las velocidades de la manivela y el balancín es 0.5.
(d) el mecanismo está en posición de punto muerto.

2. La aceleración de Coriolis se considera si:
(a) el punto considerado se mueve sobre una trayectoria que además rota.
(b) el punto considerado se mueve sobre una trayectoria estacionaria.
(c) el punto considerado se mueve sobre una trayectoria circular.
(d) el punto considerado se mueve sobre cualquier trayectoria curvilínea.

3. En un mecanismo de cuatro barras, si *l* es la longitud del eslabón más largo y *s* es la del más corto y *p* y *q* son las de los dos eslabones restantes. La condición de Grashof establece que:
(a) $l + s \leq p + q$
(b) $l - s \leq p - q$
(c) $l + s \geq p + q$
(d) $l - s \geq p - q$

4. La expresión de Gruebler para obtener los GDL de un mecanismo plano con *n* eslabones y *J* pares cinemáticos viene dada por:
(a) GDL=3(n -1) - J
(b) GDL=3(n -1) - 2J
(c) GDL=2(n -1) - J
(d) GDL=2(n -1) - 2J

5. ¿Cuál de los siguientes engranajes se usa para transmitir entre ejes no paralelos que se cruzan?:
(a) cilíndrico recto.
(b) cónico de dentado recto.
(c) de tornillo sin fin y rueda.
(d) helicoidal con ángulos de hélice iguales y de signo contrario en el piñón y rueda

6. El cociente entre el paso circular y el módulo es:
(a) 2Π
(b) Π
(c) $\Pi/2$
(d) 1

7. Un tren de engranajes donde al menos un eje del tren tiene movimiento espacial se llama:
(a) simple
(b) compuesto
(c) epicicloidal
(d) recurrente.

8. En un tren de engranajes, las ruedas parásitas se usan para:
(a) incrementar la velocidad
(b) cambiar el sentido de rotación
(c) disminuir la velocidad
(d) incrementar la velocidad y cambiar el sentido de rotación.

9. En un motor multi-cilíndrico en línea, desde el punto de vista del equilibrado, la configuración más idónea de la disposición de las muñequillas del cigüeñal se decide en función de que:
(a) tanto fuerzas como momentos, primarios y secundarios, estén equilibrados.
(b) las fuerzas primarias estén equilibradas
(c) las fuerzas secundarias estén equilibradas
(d) tanto las fuerzas primarias como las secundarias estén equilibradas

10. Un rotor está equilibrado dinámicamente si:
(a) el polígono de fuerzas de inercia es cerrado
(b) el polígono de momentos de las fuerzas de inercia es cerrado.
(c) los polígonos de fuerzas y momentos son cerrados.
(d) ninguna de los anteriores.