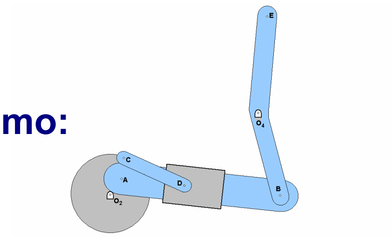
Nombre: **Mecanismo:**



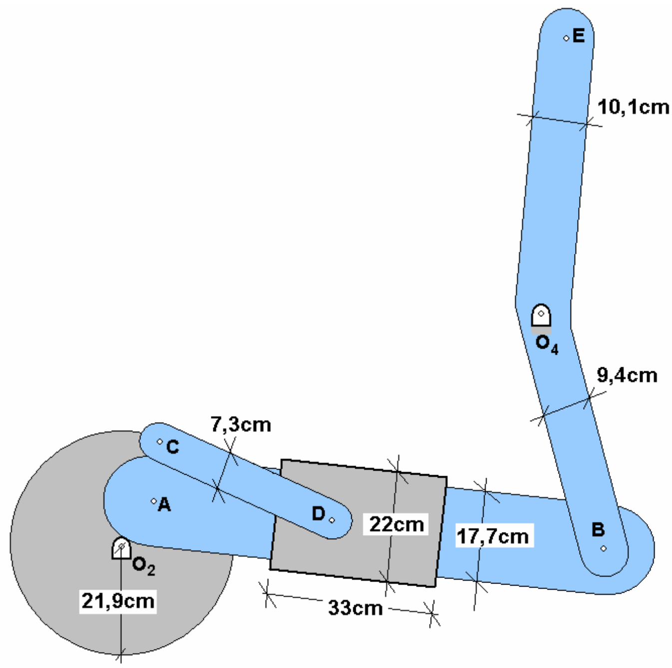
PROYECTO DE TEORIA DE MECANISMOS.

Análisis cinemático y dinámico de un mecanismo plano articulado con un grado de libertad.

10. Análisis dinámico del mecanismo con el método de las tensiones en las barras.

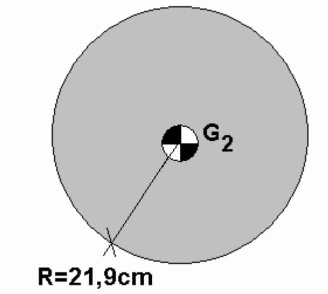
10.1 Calcular la posición del **centro de gravedad, la masa y el momento de inercia** de cada uno de los eslabones del mecanismo sabiendo que están fabricados de acero con una densidad de 7,8 g/cm^3. Considerar las barras como paralelepípedos con longitud igual a la distancia entre articulaciones y espesor 1cm. El eslabón 2 es un disco macizo de espesor 1cm, y la deslizadera 6 es otro paralelepípedo con las dimensiones indicadas en el dibujo y espesor 2 cm.

Para calcular la masa y el momento de inercia de cada eslabón, necesitamos las dimensiones de los eslabones. Como en el enunciado indican que consideremos la longitud como la distancia entre articulaciones, falta por conocer la altura de los eslabones 3, 4 (O_4B y O_4E), 5 y 6, y la longitud del eslabón 6. Medimos estos valores en el dibujo del mecanismo entregado con el primer apartado del proyecto.



Sabemos que el espesor es e=1cm para los eslabones 2, 3, 4 y 5, y e=2cm para el eslabón 6. Sabemos también que todos los eslabones son de acero con densidad δ=7.8gr/cm^3. Con estos datos, calculamos la masa, el momento de Inercia y la posición del centro de gravedad de cada uno de los eslabones.

Eslabón 2

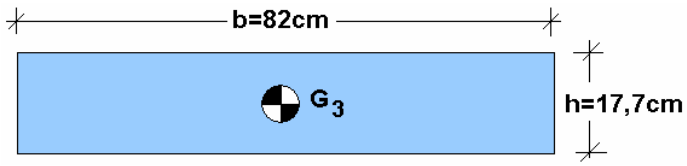


$$M_2 = \pi \cdot R^2 \cdot e \cdot \delta = 11.753gr = 11,753Kg$$

$$I_{G2} = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot R^2 = 2.818,43Kgcm^2$$

La posición de su centro de gravedad G_2 coincide con O_2.

Eslabón 3



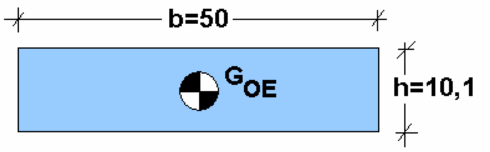
$$M_3 = b \cdot h \cdot e \cdot \delta = 11.321gr = 11,321Kg$$

$$I_{G3} = \frac{1}{12} \cdot M_3 \cdot \left(b^2 + h^2\right) = 6.639,10Kgcm^2$$

El centro de gravedad está situado sobre la línea AB, a 41cm de A.

Eslabón 4

Tramo O_4E

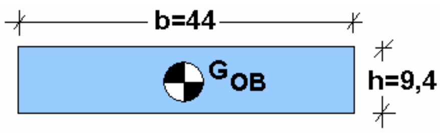


$$M_{OE} = b \cdot h \cdot e \cdot \delta = 3.939gr = 3,939Kg$$

$$I_{GOE} = \frac{1}{12} \cdot M_{OE} \cdot \left(b^2 + h^2\right) = 544,22Kgcm^2$$

El centro de gravedad está situado sobre la línea O_4E, a 25cm de O_4.

Tramo O_4B

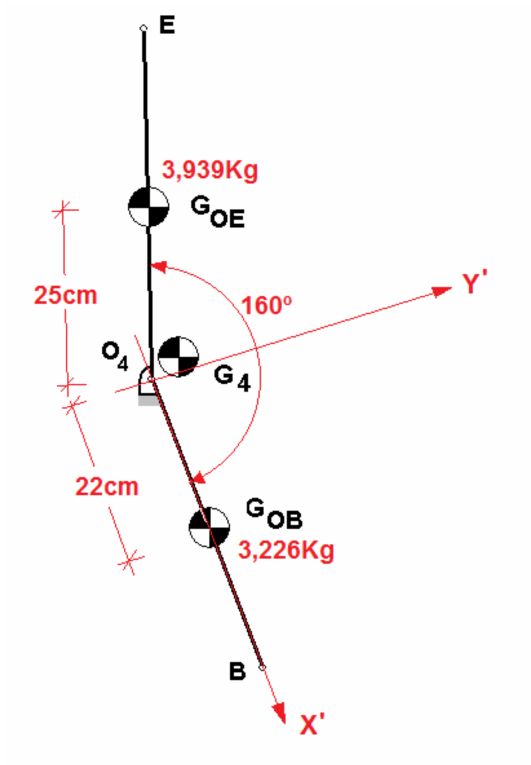


$$M_{OB} = b \cdot h \cdot e \cdot \delta = 3.226gr = 3,226Kg$$

$$I_{GOB} = \frac{1}{12} \cdot M_{OB} \cdot \left(b^2 + h^2\right) = 854,10Kgcm^2$$

El centro de gravedad está situado sobre la línea O_4B, a 22cm de O_4.

Eslabón 4: combinación de los tramos O_4B y O_4E



La masa del eslabón 4 será la suma de las masas de los dos tramos:

$$M_4 = M_{OB} + M_{OE} = 7{,}165Kg$$

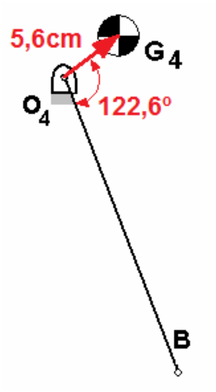
Para calcular la posición del centro de gravedad, tomamos momentos estáticos respecto a O_4, proyectando los vectores de posición de los centros de gravedad de los tramos O_4E y O_4E sobre los ejes X' e Y':

$$x'_{GOE} = 25 \cdot \cos 160º = -23{,}5cm$$
$$y'_{GOE} = 25 \cdot sen160º = 8{,}6cm$$
$$x'_{GOB} = 22cm$$
$$y'_{GOE} = 0cm$$

$$x'_{G4} = \frac{x'_{GOE} \cdot M_{OE} + x'_{GOB} \cdot M_{OB}}{M_4} = -3cm$$

$$y'_{G4} = \frac{y'_{GOE} \cdot M_{OE} + y'_{GOB} \cdot M_{OB}}{M_4} = 4{,}7cm$$

Calculamos el módulo del vector de posición del centro de gravedad del eslabón 4 respecto a O_4 y su ángulo respecto a O_4B.



$$O_4G_4 = \sqrt{(x'_{G4})^2 + (y'_{G4})^2} = 5{,}6cm$$

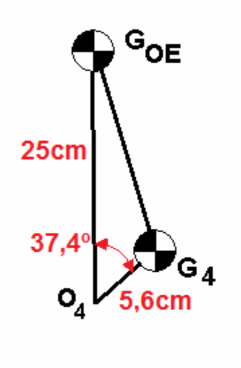
$$\theta_{O4G4} = \arctan \frac{y'_{G4}}{x'_{G4}} = 122{,}6º \text{ *}$$

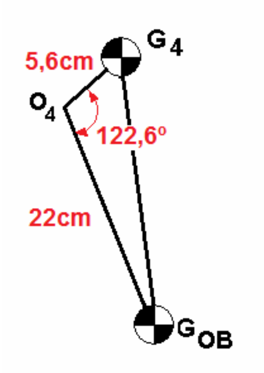
*El arcotangente tiene dos soluciones, -57,4º o 122,6º pero al ser la componente x negativa, la única solución válida es 122,6º

Para calcular el momento de inercia del eslabón 4 respecto a G_4, sumamos los momentos de inercia calculados para los tramos O_4E y O_4E, aplicando Steiner para referirlos a G_4.

$$I_{G4} = I_{GOE} + M_{OE} \cdot \overline{G_{OE}G_4}^2 + I_{GOB} + M_{OB} \cdot \overline{G_{OB}G_4}^2$$

Para calcular las distancias desde G_{OE} y G_{OB} hasta G_4, aplicamos el teorema del coseno en los triángulos de la figura:





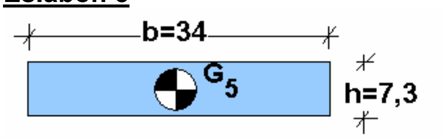
$$\overline{G_{OE}G_4} = \sqrt{\left(\overline{O_4G_4}\right)^2 + \left(\overline{O_4G_{OE}}\right)^2 - 2\cdot\left(\overline{O_4G_4}\right)\cdot\left(\overline{O_4G_{OE}}\right)\cdot\cos 37,4^{\circ}} = 20,83cm$$

$$\overline{G_{OB}G_4} = \sqrt{\left(\overline{O_4G_4}\right)^2 + \left(\overline{O_4G_{OB}}\right)^2 - 2\cdot\left(\overline{O_4G_4}\right)\cdot\left(\overline{O_4G_{OB}}\right)\cdot\cos 122,6^{\circ}} = 25,46cm$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, calculamos el momento de inercia del eslabón 4 respecto a G_4.

$$I_{G4} = 5.198,53Kgcm^2$$

Eslabón 5

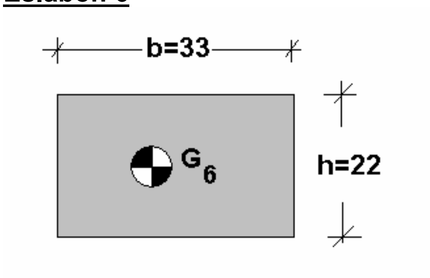


$$M_5 = b\cdot h\cdot e\cdot\delta = 1.936gr = 1,936Kg$$

$$I_{G5} = \frac{1}{12}\cdot M_5\cdot\left(b^2+h^2\right) = 195,10Kgcm^2$$

El centro de gravedad está situado sobre la línea AB, a 17cm de C.

Eslabón 6



$$M_6 = b\cdot h\cdot e\cdot\delta = 11.326gr = 11,326Kg$$

$$I_{G6} = \frac{1}{12}\cdot M_6\cdot\left(b^2+h^2\right) = 1.484,65Kgcm^2$$

La posición del centro de gravedad es datos del problema y está situado en el punto D.

Calcular la **fuerza de inercia y el par de inercia** que actúa sobre cada eslabón en la posición de máxima aceleración del eslabón 4, para una velocidad del eslabón 2 de 60rpm. Las aceleraciones de los centros de gravedad se pueden calcular con el Winmecc. Considerar que el centro de gravedad del eslabón 6 coincide con el punto D.

Introducimos las posiciones de los centros de gravedad en el Winmecc y obtenemos sus aceleraciones, y las aceleraciones angulares de los eslabones.

$$A_{G2} = 0cm/s^2 \qquad \alpha_2 = 0rad/s^2$$

$$A_{G3} = 430,79cm/s^2 \qquad \theta_{AG3} = 193,85^{\circ} \qquad \alpha_3 = -1,68rad/s^2$$

$$A_{G4} = 60,55cm/s^2 \qquad \theta_{AG4} = 323,78^{\circ} \qquad \alpha_4 = -10,81rad/s^2$$

$$A_{G5} = 853,67cm/s^2 \qquad \theta_{AG5} = 189,85^{\circ} \qquad \alpha_5 = 6,15rad/s^2$$

$$A_{G6} = 941,24cm/s^2 \qquad \theta_{AG6} = 181,35^{\circ} \qquad \alpha_6 = \alpha_3 = -1,68rad/s^2$$

Calculamos los módulos de las fuerzas y sus ángulos.

$$F_{i2} = M_2 \cdot A_{G2} = 0Kg \cdot cm/s^2 = 0N$$

$$F_{i3} = M_3 \cdot A_{G3} = 4.876,98Kg \cdot cm/s^2 = 48,77N$$

$$\theta_{Fi3} = \theta_{AG3} - 180^{\circ} = 13,85^{\circ}$$

$$F_{i4} = M_4 \cdot A_{G4} = 433,84Kg \cdot cm/s^2 = 4,34N$$

$$\theta_{Fi4} = \theta_{AG4} - 180^{\circ} = 143,78^{\circ}$$

$$F_{i5} = M_5 \cdot A_{G5} = 1.652,71Kg \cdot cm/s^2 = 16,53N$$

$$\theta_{Fi5} = \theta_{AG5} - 180^{\circ} = 9,85^{\circ}$$

$$F_{i6} = M_6 \cdot A_{G6} = 10.660,48Kg \cdot cm/s^2 = 106,60N$$

$$\theta_{Fi6} = \theta_{AG6} - 180^{\circ} = 1,35^{\circ}$$

Calculamos ahora los pares de Inercia

$$P_{i2} = -I_{G2} \cdot \alpha_2 = 0Kg \cdot cm^2/s^2 = 0Ncm$$

$$P_{i3} = -I_{G3} \cdot \alpha_3 = 11.153,67Kg \cdot cm^2/s^2 = 111,54Ncm$$

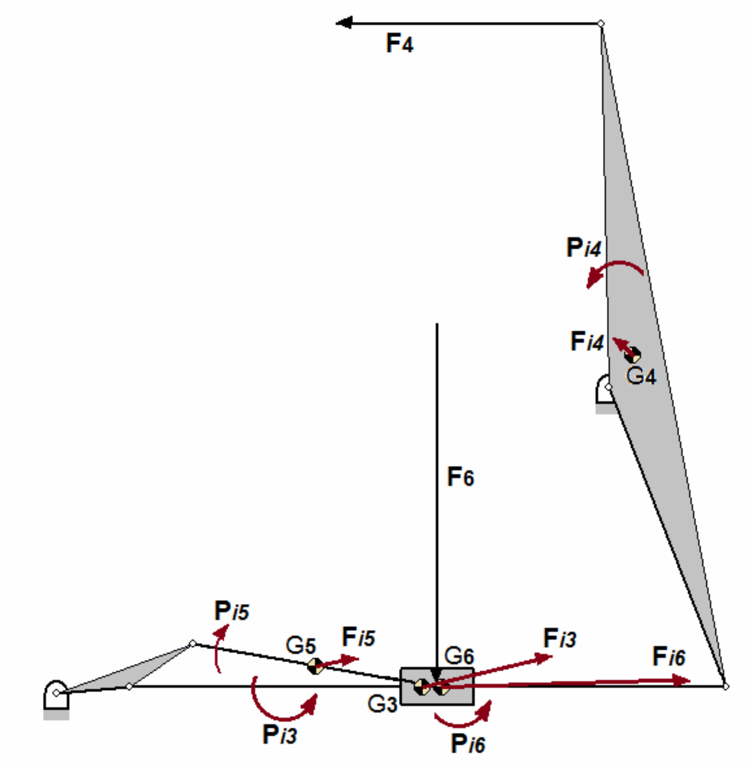
$$P_{i4} = -I_{G4} \cdot \alpha_4 = 56.156,11Kg \cdot cm^2/s^2 = 561,56Ncm$$

$$P_{i5} = -I_{G5} \cdot \alpha_5 = -1.199,87Kg \cdot cm^2/s^2 = -12,00Ncm$$

$$P_{i6} = -I_{G6} \cdot \alpha_6 = 2.494,21Kg \cdot cm^2/s^2 = 24,94Ncm$$

Dibujar el mecanismo con todas las fuerzas y pares de inercia que actúan sobre el mismo. Rellenar la siguiente tabla (ENTREGAR LOS CÁLCULOS Y EL DIBUJO EN UN A4 APARTE).

	Módulos y unidades			
Eslabón	Masa	Momento de inercia	Fuerza de inercia	Par de inercia
2	11,753Kg	2.818,43Kg·cm^2	0N	0N·cm
3	11,321Kg	6.639,10Kg·cm^2	48,77N	111,54N·cm
4	7,165Kg	5.198,53Kg·cm^2	4,34N	561,56N·cm
5	1,936Kg	195,10Kg·cm^2	16,53N	-12,00N·cm
6	11,326Kg	1484,65Kg·cm^2	106,60N	24,94N·cm



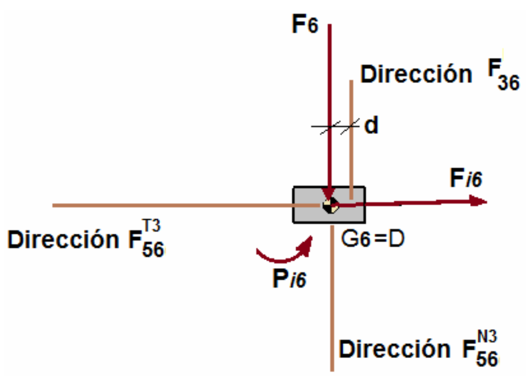
10.2 Plantear las ecuaciones para realizar el análisis dinámico del mecanismo considerando las fuerzas externas del apartado 9.1 (una fuerza de 300N vertical en D y otra de 100N horizontal hacia la izquierda en E). Junto a las ecuaciones de equilibrio de cada eslabón, dibujar un esquema donde se vean todas las fuerzas y distancias incluidas en las ecuaciones.

Hay que tener en cuenta que si vamos a introducir las medidas del mecanismo en el Winmecc en cm y la masa en Kg, la fuerza vendrá expresada en Kg·cm/s^2, y los pares vendrán en Kg·cm^2/s^2. Para calcular los valores en N habrá que multiplicar los resultados por 10^{-2}.

10.3 Resolver las ecuaciones anteriores con el método de las **tensiones en las barras** y calcular las fuerzas que se transmiten en todos los enlaces entre eslabones. Calcular también el par motor que actúa sobre el eslabón 2 en ese instante. (ENTREGAR JUNTO AL APARTADO 10.2 EN UN A4).

Empezamos planteando las ecuaciones de equilibrio de los dos eslabones más alejados del motor, el 5 y el 6.

<u>**Equilibrio del eslabón 6.**</u>



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_6 + \vec{F}_{56} + \vec{F}_{36} + \vec{F}_{i6} = 0$$

Al ser una deslizadera, vamos a descomponer la fuerza F_{56} en dos componentes, una con la dirección de la trayectoria de la deslizadera, que coincide con el eslabón 3 (F_{56}^{T3}) y otra perpendicular (F_{56}^{N3}). Podemos considerar en la posición indicada que el eslabón 3 coincide con la horizontal, ya que su ángulo es 0,09º.

Las fuerzas F_{36} y F_6 son perpendiculares al eslabón 3, mientras que las fuerzas F_{i6} y F_{56} tienen componentes en las dos direcciones. Podemos calcular las componentes de la fuerza de inercia F_{i6}:

$$F_{i6}^{T3} = F_{i6} \cdot \cos 1{,}35º = 10.657{,}52 Kg \cdot cm / s^2$$
$$F_{i6}^{N3} = F_{i6} \cdot sen 1{,}35º = 251{,}16 Kg \cdot cm / s^2$$

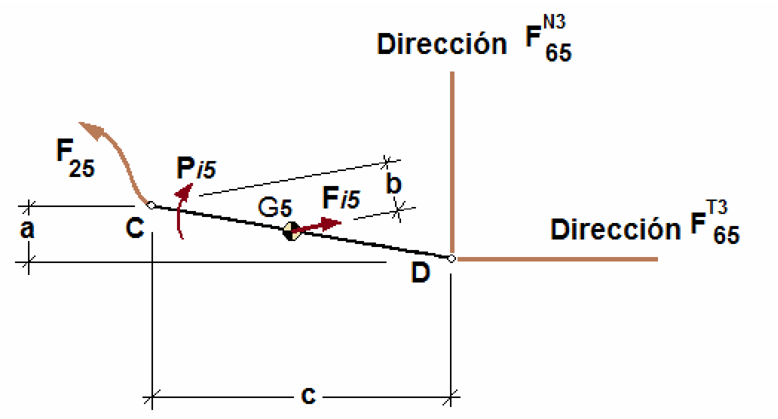
Planteamos ahora el equilibrio de las fuerzas en las dos direcciones considerando como positivos los sentidos hacia la derecha y hacia arriba:

$$\sum F^{N3} = 0 \Rightarrow F_6 + F_{i6}^{N3} + F_{56}^{N3} + F_{36} = -30000 + 251{,}16 + F_{56}^{N3} + F_{36} = 0$$
$$\sum F^{T3} = 0 \Rightarrow F_{i6}^{T3} + F_{56}^{T3} = 10.657{,}52 + F_{56}^{T3} = 0 \Rightarrow F_{56}^{T3} = -10.657{,}52 Kg{\cdot}cm / s^2$$

$\sum M_6 = 0 \Rightarrow$ Las fuerzas F_6, F_{i6} y F_{56} pasan por el punto D, pero la línea de acción de la fuerza F_{36} no puede pasar también por D, ya que tiene que equilibrar el par de inercia para que la suma de momentos sea nula.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_{36} \cdot d + P_{i6} = 0$$

Equilibrio del eslabón 5.



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{65} + \vec{F}_{i5} + \vec{F}_{25} = 0$$

Donde conocemos la fuerza de inercia y la componente F_{65}^{T3}, ya que:

$$F_{65}^{T3} = -F_{56}^{T3} = 10.657{,}52 Kg{\cdot}cm / s^2$$

$\sum M_5 = 0 \Rightarrow$ Tomamos momentos en C para eliminar F_{25} de la ecuación. Consideramos como positivo el sentido antihorario y suponemos que la fuerza F_{65}^{N3} tiene sentido hacia abajo:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{65}^{T3} \cdot a + F_{i5} \cdot b - P_{i5} - F_{65}^{N3} \cdot c = 0$$

Medimos las distancias *a*, *b* y *c* en el dibujo: a = 5,8cm ; b= 5,9cm; c = 33,5cm

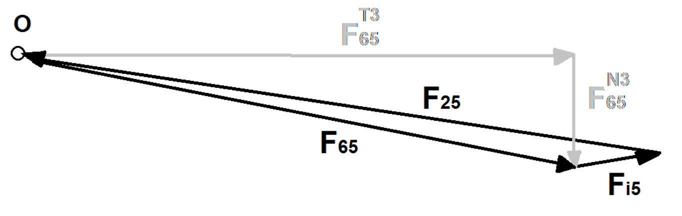
Sustituyendo estos valores en la ecuación de momentos y despejando obtenemos:

$$F_{65}^{N3} = 2.100,44 Kg{\cdot}cm/s^2$$

Podemos calcular la fuerza F_{56} a partir de sus dos componentes:

$$F_{65} = \sqrt{\left(F_{65}^{T3}\right)^2 + \left(F_{65}^{N3}\right)^2} = 10.861,94 Kg{\cdot}cm/s^2$$

Dibujando el polígono de fuerzas a escala, calculamos la fuerza F_{25}:



Medimos las longitudes de los vectores y aplicamos la escala para obtener el módulo:

F_{25} = 12.418 Kg·cm/s^2

Volvemos al eslabón 6 y calculamos F_{36} y la distancia d.

Sabiendo que la fuerza F_{56}^{N3} es igual y contraria a la fuerza calculada F_{65}^{N3}, la fuerza F_{56}^{N3} será un vector de módulo 2.100,44*Kg.cm/s*^{2} y dirección perpendicular al eslabón 3 con sentido hacia arriba.

Conociendo este valor, podemos calcular la F_{36} a partir de la ecuación de equilibrio de las fuerzas del eslabón 6, perpendiculares al eslabón 3:

$$F_6 + F_{i6}^{N3} + F_{56}^{N3} + F_{36} = -30000 + 251,16 + 2100,44 + F_{36} = 0 \Rightarrow F_{36} = 27.648,4 Kg{\cdot}cm/s^2$$

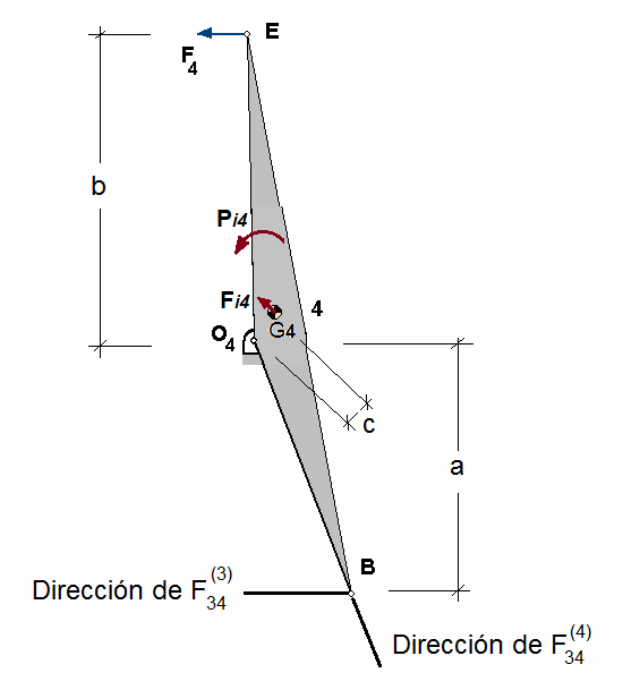
Sustituyendo este valor en la ecuación de momentos del eslabón 6, calculamos la distancia *d:*

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_{36} \cdot d + P_{i6} = 0 \Rightarrow d = -0.09cm$$

La fuerza F_{36} actúa sobre el eslabón 6 a una distancia de 0,09cm a la izquierda del punto D.

Una vez calculadas las fuerzas que actúan sobre los eslabones 5 y 6, pasamos a los eslabones 3 y 4.

<u>Equilibrio del eslabón 4.</u>



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_4 + \vec{F}_{i4} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{14} = 0$$

$\sum M_4 = 0 \Rightarrow$ Para tomar momentos descomponemos la fuerza F_{34} en dos componentes. En este caso se ha tomado una componente en la dirección O_4B ($F_{34}^{(4)}$) y otra en la dirección AB ($F_{34}^{(3)}$).

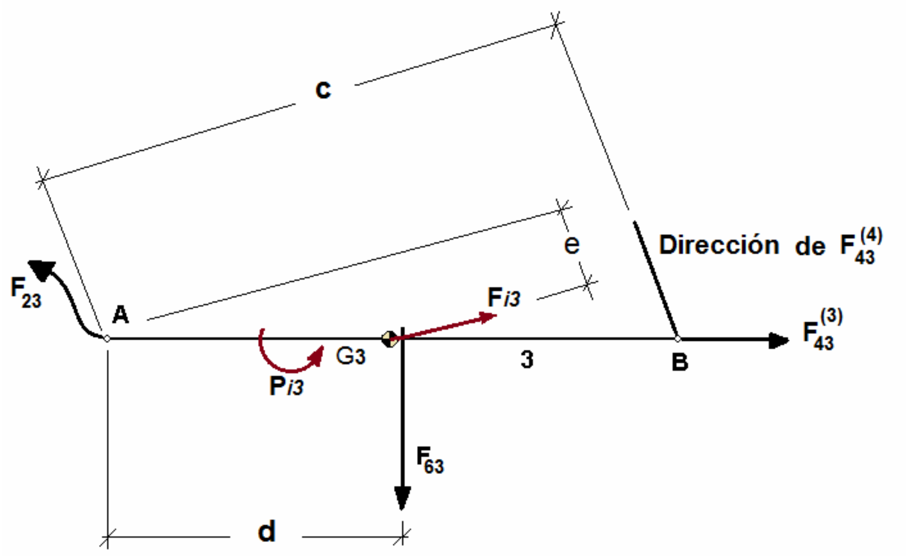
Tomamos momentos en O_4 para eliminar F_{14} de la ecuación. Consideramos como positivo el sentido antihorario y suponemos que la fuerza $F_{34}^{(3)}$ tiene sentido de B hacia A:

$$\sum M_{O4} = 0 \Rightarrow -F_{34}^{(3)} \cdot a + F_4 \cdot b + F_{i4} \cdot c + P_{i4} = 0$$

Medimos las distancias *a* y *b* en el dibujo: *a = 41,1cm ; b = 50cm ; c = 5,6cm*

Sustituyendo estos valores en la ecuación de momentos y despejando obtenemos: $F_{34}^{(3)}$ = 13.591 Kg·cm/s^2 con sentido de B hacia A.

Equilibrio del eslabón 3.



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{63} + \vec{F}_{i3} + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{23} = 0$$

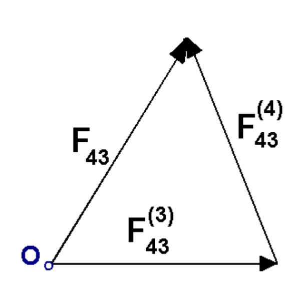
$\sum M_3 = 0 \Rightarrow$ Tomamos momentos en A para eliminar F_{23} de la ecuación. Consideramos como positivo el sentido antihorario y suponemos que la fuerza $F_{43}^{(4)}$ tiene sentido de B hacia O_4:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{43}{}^{(4)} \cdot c - F_{63} \cdot d + F_{i3} \cdot e + P_{i3} = 0$$

Medimos las distancias *c, d* y *e* en el dibujo: *c = 76.4cm ; d= 42.3cm; e = 9,8cm*

Sustituyendo estos valores en la ecuación de momentos y despejando obtenemos: $F_{43}^{(4)}$ = 14.536Kg·cm/s^2 con sentido de B hacia O_4.

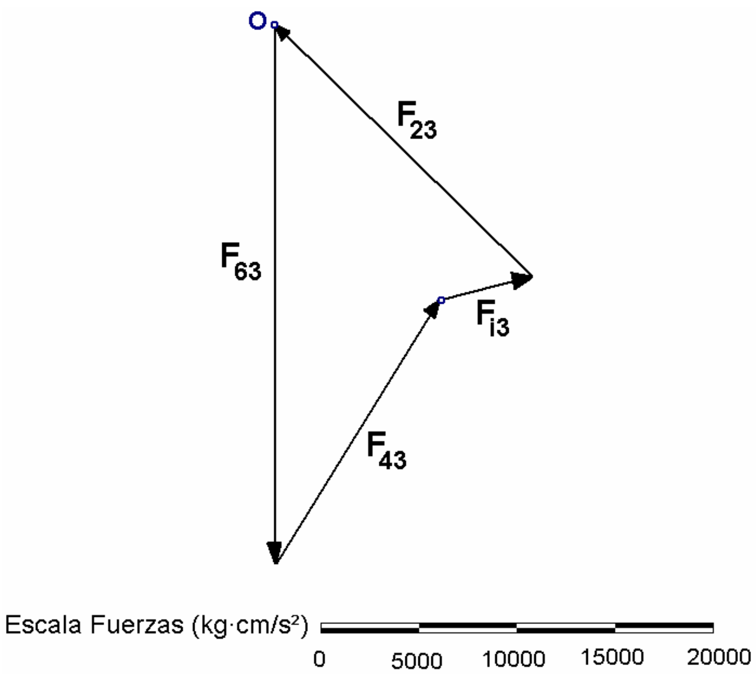
Sumamos gráficamente los vectores $F_{43}^{(4)}$ y $F_{43}^{(3)}$ dibujando un polígono y obtenemos F_{43} = 15.896Kg·cm/s^2 con la dirección indicada en el polígono.



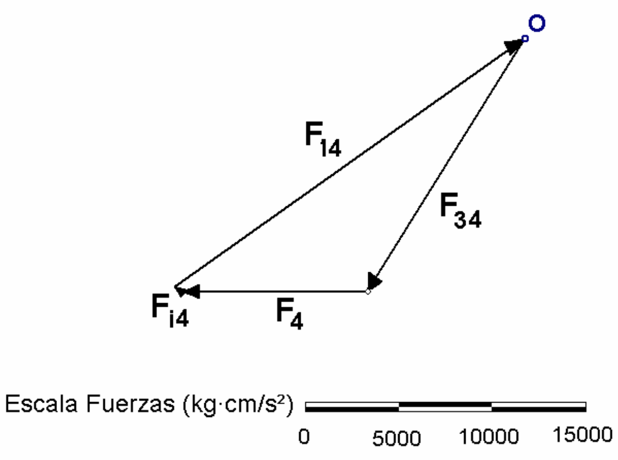
$$\vec{F}_{43}{}^{(3)} + \vec{F}_{43}{}^{(4)} = \vec{F}_{43}$$

Dibujando el polígono de fuerzas del equilibrio del eslabón 3, obtenemos el módulo y la dirección de la única fuerza desconocida, F_{23} = 18.430Kg·cm/s^2

$$\vec{F}_{63} + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{i3} + \vec{F}_{23} = 0$$



Volvemos al eslabón 4 y dibujamos su polígono de fuerzas para calcular F_{14}.



$$\vec{F}_{34} + \vec{F}_4 + \vec{F}_{i4} + \vec{F}_{14} = 0$$

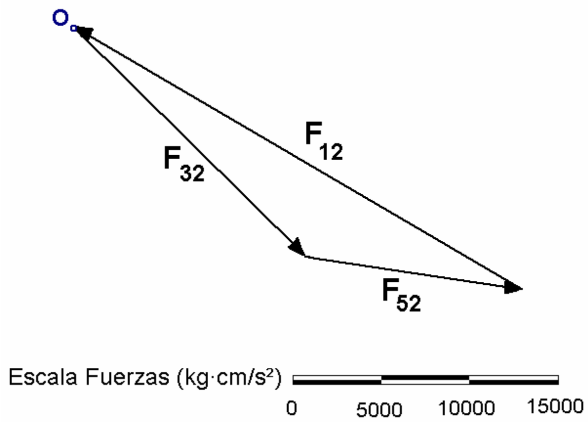
Midiendo el vector F_{14} y aplicando el factor de escala obtenemos F_{14} = 22.930Kg·cm/s^2

Equilibrio del eslabón 2.

Planteamos la ecuación de equilibrio de fuerzas del eslabón 2 para calcular F_{12}.

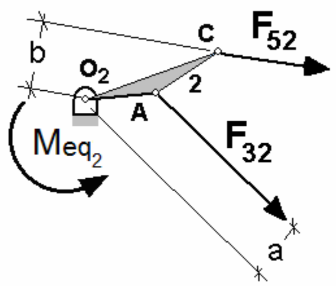
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{32} + \vec{F}_{52} + \vec{F}_{12} = 0$$

Los módulos de las fuerzas F_{32} y F_{52} se han calculado planteando el equilibrio de los eslabones 3 y 5 respectivamente, por lo que la única fuerza desconocida es F_{12}. Dibujando el polígono a escala, podemos calcular su valor.



Midiendo y aplicando el factor de escala, obtenemos F_{12} = 29.360 Kg·cm/s^2

Para terminar, planteamos el equilibrio de momentos del eslabón 2.



Tomamos momentos en O_2 considerando como positivo el sentido antihorario. Despreciamos la fuerza F_{52}.

$$\sum M_{O2} = 0 \Rightarrow -F_{32} \cdot a - F_{52} \cdot b + Meq_2 = 0$$

Midiendo en el dibujo a escala, obtenemos a = 7,6cm y b = 9,6cm. Operando y despejando de la ecuación de momentos, calculamos

Meq_2= 18.430Kg·cm/s² x 7,6cm+ 12.418Kg·cm/s² x 9,6cm= 259.280Kg·cm²/s²

10.4 Realizar el análisis dinámico con el programa Winmecc en la posición indicada y rellenar la siguiente tabla con los resultados:

	Módulos de las fuerzas	
Fuerza/ Momento	Tensiones en las barras	Winmecc
Momento 2	259.280Kg·cm²/s²	258.613,61 Kg·cm²/s²
Fuerza 12	29.360 Kg·cm/s²	29.365,41 Kg·cm/s²
Fuerza 23	18.430 Kg·cm/s²	18.435,42 Kg·cm/s²
Fuerza 34	15.896 Kg·cm/s²	15.897,36 Kg·cm/s²
Fuerza 14	22.930 Kg·cm/s²	22.934,05 Kg·cm/s²
Fuerza 25	12.418 Kg·cm/s²	12.380,67 Kg·cm/s²
Fuerza 56	10.861,94 Kg·cm/s²	10.824,90 Kg·cm/s²
Fuerza 36	27.684,40 Kg·cm/s²	27.664,24 Kg·cm/s²