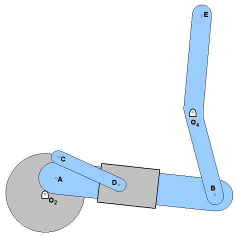
**Nombre:** **Mecanismo:**



# PROYECTO DE TEORIA DE MECANISMOS.

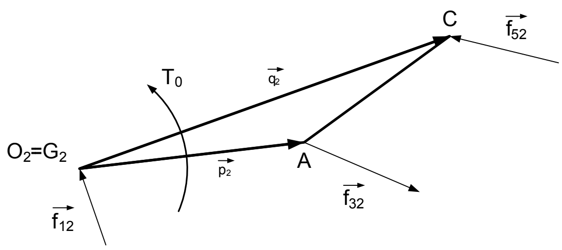
## Análisis cinemático y dinámico de un mecanismo plano articulado con un grado de libertad.

## 11. Análisis dinámico del mecanismo con el método matricial.

**11.1** Plantear las ecuaciones para realizar el análisis dinámico del mecanismo con el método **matricial**. Junto a las ecuaciones de equilibrio de cada eslabón, dibujar un esquema donde se vean **todos** los vectores incluidos en las ecuaciones (ENTREGAR EN OTRO A4 APARTE).

**Eslabón 2:**

Eslabón 2




$$f_{12x}+f_{32x}+f_{52x}=0 \quad (1)$$

$$f_{12y}+f_{32y}+f_{52y}=0 \quad (2)$$

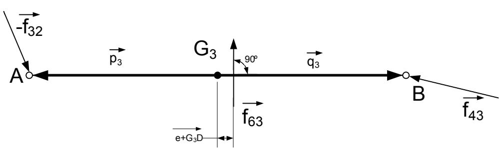
$$p_{2x}\cdot f_{32y}-p_{2y}\cdot f_{32x}+q_{2x}\cdot f_{52y}-q_{2y}\cdot f_{52x}+T_0=0 \quad (3)$$

$$p_{2x}=O_2A\cdot\cos 5^{o}=9.96\ cm \qquad q_{2x}=O_2C\cdot\cos 20^{o}=18.79\ cm$$

$$p_{2y}=O_2A\cdot\text{sen}5^{o}=0.87\ cm \qquad q_{2y}=O_2C\cdot\text{sen}20^{o}=6.84\ cm$$

**Eslabón 3:**

Eslabón 3




$$-f_{32x}+f_{43x}+f_{63x}=m_3A_{g3x} \quad (4)$$

$$-f_{32y}+f_{43y}+f_{63y}=m_3A_{g3y} \quad (5)$$

$$-p_{3x}\cdot f_{32y}+p_{3y}\cdot f_{32x}+q_{3x}\cdot f_{43y}-q_{3y}\cdot f_{43x}+\vec{e}\wedge\vec{f}_{63}+G_3D_x\cdot f_{63y}-G_3D_y\cdot f_{63x}=I_3\alpha_3 \quad (6)$$

$$f_{63x}\cdot u_x+f_{63y}\cdot u_y=0 \quad (7)$$

$$p_{3x} = G_3A \cdot \cos 180.1^{o} = -41.0\ cm \qquad q_{3x} = G_3B \cdot \cos 0.1^{o} = 41.0\ cm$$
$$p_{3y} = G_3A \cdot \mathrm{sen}180.1^{o} = -0.07\ cm \qquad q_{3y} = G_3B \cdot \mathrm{sen}0.1^{o} = 0.07\ cm$$
$$G_3D_x = (42.32 - 41) \cdot \cos 0.1^{o} = 1.32\ cm \quad u_x = 1 \cdot \cos 0.1^{o} = 1\ cm$$
$$G_3D_y = (42.32 - 41) \cdot \mathrm{sen}0.1^{o} = 0 \qquad u_y = 1 \cdot \mathrm{sen}0.1^{o} = 0\ cm$$
$$m_3 = 11.321\ kg \qquad I_3 = 6639.10\ kgcm^2 \qquad \alpha_3 = -1.68\,\frac{rad}{s^2}$$
$$A_{G3x} = -418.27\,\frac{cm}{s^2} \qquad A_{G3y} = -103.13\,\frac{cm}{s^2}$$

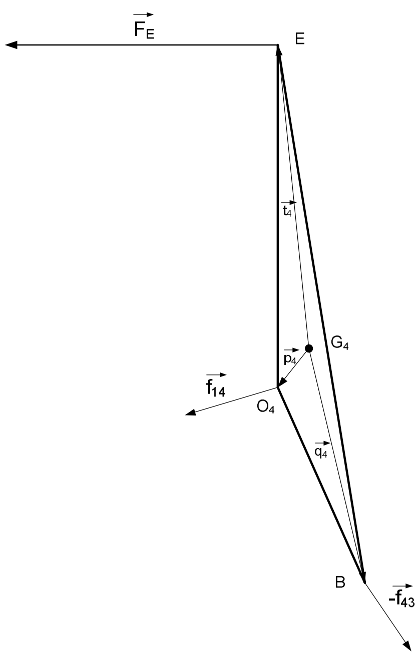
**Eslabón 4:**

$$f_{14x} - f_{43x} = m_4 \cdot A_{g4x} + F_{Ex} \tag{8}$$
$$f_{14y} - f_{43y} = m_4 \cdot A_{g4y} \tag{9}$$
$$p_{4x} \cdot f_{14y} - p_{4y} \cdot f_{14x} - q_{4x} \cdot f_{43y} + q_{4y} \cdot f_{43x} = I_4 \cdot \alpha_4 - (t_{4y} \cdot F_{Ex}) \tag{10}$$

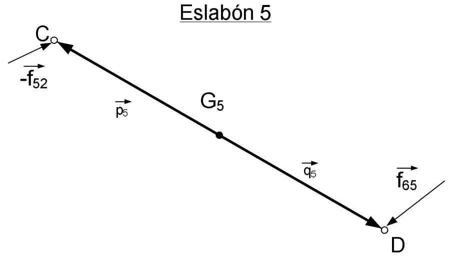
En la ecuación (10) como la fuerza $F_E$ solo tiene componente en $x$, el momento es $-t_{4y}.|F_{Ex}|$, y como $F_{Ex}$ es negativo pasa al otro término como vemos en la ecuación (10)

$$p_{4x} = G_4O_4 \cdot \cos 233.87^{o} = -3.30\ cm \qquad q_{4x} = G_4B \cdot \cos 285.58^{o} = 12.69\ cm$$
$$p_{4y} = G_4O_4 \cdot \mathrm{sen}233.87^{o} = -4.52\ cm \qquad q_{4y} = G_4B \cdot \mathrm{sen}285.58^{o} = -45.51\ cm$$
$$t_{4x} = G_4E \cdot \cos 95.57^{o} = -4.43\ cm$$
$$t_{4y} = G_4E \cdot \mathrm{sen}95.57^{o} = 45.46\ cm$$
$$m_4 = 7.165\ kg \qquad I_4 = 5198,53\ kgcm^2 \qquad \alpha_4 = -10.81\,\frac{rad}{s^2}$$
$$A_{G4x} = 48.85\,\frac{cm}{s^2} \qquad A_{G4y} = -35.78\,\frac{cm}{s^2}$$
$$|F_{Ex}| = 10000\ kg\,\frac{cm}{s^2}$$

Eslabón 4



**Eslabón 5:**



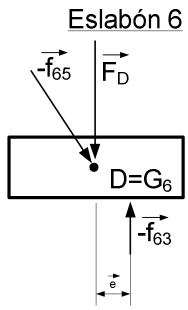

$$-f_{52x} + f_{65x} = m_5 \cdot A_{G5x} \tag{11}$$
$$-f_{52y} + f_{65y} = m_5 \cdot A_{G5y} \tag{12}$$
$$-p_{5x} \cdot f_{52y} + p_{5y} \cdot f_{52x} + q_{5x} \cdot f_{65y} - q_{5y} \cdot f_{65x} = I_5 \alpha_5 \tag{13}$$

$$p_{5x} = G_5C \cdot \cos 170º = -16.74\ cm \qquad q_{5x} = G_5D \cdot \cos 350º = 16.74\ cm$$
$$p_{5y} = G_5C \cdot \text{sen}170º = 2.95\ cm \qquad q_{5y} = G_5D \cdot \text{sen}350º = -2.95\ cm$$
$$m_5 = 1.936\ kg \qquad I_5 = 195.1\ kgcm^2 \qquad \alpha_5 = 6.15\ \frac{rad}{s^2}$$
$$A_{G5x} = -841.09\ \frac{cm}{s^2} \qquad A_{G5y} = -146\ \frac{cm}{s^2}$$

**Eslabón 6:**

$$-f_{63x} - f_{65x} = m_6 \cdot A_{G6x} \tag{14}$$
$$-f_{63y} - f_{65y} - F_{Dy} = m_6 \cdot A_{G6y} \tag{15}$$
$$-\vec{e} \wedge \vec{f}_{63} = I_6 \alpha_6 \quad \rightarrow \quad \vec{e} \wedge \vec{f}_{63} = -I_6 \alpha_6 \tag{16}$$

$$m_6 = 11.326\ kg \qquad I_6 = 1484.65\ kgcm^2 \qquad \alpha_6 = -1.68\ \frac{rad}{s^2}$$
$$A_{G6x} = -940.98\ \frac{cm}{s^2} \qquad A_{G6y} = -22.23\ \frac{cm}{s^2}$$
$$\left|F_{Dy}\right| = 30000\ kg\ \frac{cm}{s^2}$$




Sustituyendo la ecuación (16) en la ecuación (6), se obtiene el siguiente sistema de 15 ecuaciones con 15 incógnitas:

$$f_{12x} + f_{32x} + f_{52x} = 0$$
$$f_{12y} + f_{32y} + f_{52y} = 0$$
$$p_{2x} \cdot f_{32y} - p_{2y} \cdot f_{32x} + q_{2x} \cdot f_{52y} - q_{2y} \cdot f_{52x} + T_0 = 0$$

$$-f_{32x} + f_{43x} + f_{63x} = m_3 A_{g3x}$$
$$-f_{32y} + f_{43y} + f_{63y} = m_3 A_{g3y}$$
$$-p_{3x} \cdot f_{32y} + p_{3y} \cdot f_{32x} + q_{3x} \cdot f_{43y} - q_{3y} \cdot f_{43x} + G_3 D_x \cdot f_{63y} - G_3 D_y \cdot f_{63x} = I_3 \alpha_3 + I_6 \alpha_6$$
$$f_{63x} \cdot u_x + f_{63y} \cdot u_y = 0$$
$$f_{14x} - f_{43x} = m_4 \cdot A_{g4x} + F_{Ex}$$
$$f_{14y} - f_{43y} = m_4 \cdot A_{g4y}$$
$$p_{4x} \cdot f_{14y} - p_{4y} \cdot f_{14x} - q_{4x} \cdot f_{43y} + q_{4y} \cdot f_{43x} = I_4 \cdot \alpha_4 - (t_{4y} \cdot F_{Ex})$$
$$-f_{52x} + f_{65x} = m_5 \cdot A_{G5x}$$
$$-f_{52y} + f_{65y} = m_5 \cdot A_{G5y}$$
$$-p_{5x} \cdot f_{52y} + p_{5y} \cdot f_{52x} + q_{5x} \cdot f_{65y} - q_{5y} \cdot f_{65x} = I_5 \alpha_5$$
$$-f_{63x} - f_{65x} = m_6 \cdot A_{G6x}$$
$$-f_{63y} - f_{65y} = m_6 \cdot A_{G6y} + F_{Dy}$$

**11.2** Obtener las matrices necesarias para resolver el sistema de ecuaciones con el método matricial. Se valorará la resolución de la matriz de las incógnitas con algún programa informático. En ese caso es necesario entregar una impresión con el programa utilizado donde aparezcan los parámetros de entrada del programa y los resultados obtenidos (ENTREGAR EN OTRO A4 APARTE).

El sistema matricial que se plantea de las ecuaciones anteriores sería:

**[A][f] = [B]**

Donde cada una de las matrices serían:

$$A = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.87 & 9.96 & -6.84 & 18.79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.07 & 41 & 0 & 0 & -0.07 & 41 & 0 & 1.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -45.51 & -12.69 & 0 & 0 & 4.52 & -3.3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2.95 & 16.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.95 & 16.74 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{vmatrix}$$

$$f = \begin{vmatrix} f_{12x} \\ f_{12y} \\ f_{32x} \\ f_{32y} \\ f_{52x} \\ f_{52y} \\ f_{43x} \\ f_{43y} \\ f_{63x} \\ f_{63y} \\ f_{14x} \\ f_{14y} \\ f_{65x} \\ f_{65y} \\ T_o \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4735.2\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ -1167.5\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ -13647.9 kg\,\dfrac{cm^2}{s^2} \\ 0 \\ 10350.0\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ -256.4\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ -510796\, kg\,\dfrac{cm^2}{s^2} \\ -1628.3\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ -282.7\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ 1199.86\, kg\,\dfrac{cm^2}{s^2} \\ -10657.5\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \\ 29748.2\, kg\,\dfrac{cm}{s^2} \end{vmatrix}$$

Para obtener los valores de fuerzas y el par $T_o$ tenemos que invertir la matriz *A* y multiplicar esta por el vector *B*, obteniendo:

$$\mathbf{f = A^{-1}B}$$

Esto lo conseguimos mediante matlab, con los siguientes resultados:

$$f = \begin{vmatrix} f_{12x} \\ f_{12y} \\ f_{32x} \\ f_{32y} \\ f_{52x} \\ f_{52y} \\ f_{43x} \\ f_{43y} \\ f_{63x} \\ f_{63y} \\ f_{14x} \\ f_{14y} \\ f_{65x} \\ f_{65y} \\ T_o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25369\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 14774.7\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 13083.3\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ -12930.3\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 12285.8\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ -1844.3\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 8348.1\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 13523.3\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 0 \\ -27621.1\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 18698.1\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 13266.9\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 10657.5\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ -2127.1\,kg\dfrac{cm}{s^2} \\ 258859\,kg\dfrac{cm^2}{s^2} \end{vmatrix}$$

**11.3** Realizar el análisis dinámico con el programa Winmecc en la posición indicada y rellenar la siguiente tabla con los resultados:

Los resultados obtenidos puestos en el sistema internacional serían:

| | **Módulos de las fuerzas** | |
|---|---|---|
| **Fuerza/ Momento** | Matricial | Winmecc |
| **Momento 2** | 25.86 Nm | 25.88 Nm |
| **Fuerza 12** | 293.6 N | 293.6 N |
| **Fuerza 23** | 184.3 N | 183.9 N |
| **Fuerza 34** | 158.9 N | 158.9 N |
| **Fuerza 14** | 229.3 N | 229.2 N |
| **Fuerza 25** | 123.8 N | 124.2 N |
| **Fuerza 56** | 108.2 N | 108.6 N |
| **Fuerza 36** | 278 N | 278 N |