ÁLGEBRA. Escuela Politécnica Superior
Examen Parcial. Noviembre 2012

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: GRADO Y GRUPO:

1. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \qquad U_2 =< \{(1,2,-3),(0,4,0)\} >$$

   (a) (1 punto) Escribe las ecuaciones cartesianas de $U_1 \cap U_2$.

   (b) (1 punto) Escribe una base de $U_1 + U_2$.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$f(x,y,z) = (x - 2y, 4x - 5y, y)$$

   (a) (0,25 puntos) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica.

   (b) (0,75 puntos) Calcula la matriz de f respecto de la base $\{(2,1,0);(0,-3,-2);(0,0,3)\}$.

   (c) (0,5 puntos) Escribe la relación entre las matrices de los dos apartados anteriores.

   (d) (0,5 punto) Calcula las ecuaciones cartesianas de $Kerf$ y una base de Imf.

   (e) (0,5 puntos) ¿Es f sobreyectiva y/o inyectiva?

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   (a) (0,25 puntos) Escribe la fórmula del endomorfismo f cuya matriz asociada es A.

(b) (0,25 puntos) Sabiendo que su polinomio característico es$-(\lambda-3)^2\cdot(\lambda+3)$, calcula sus autovalores.

(c) (1,5 puntos) Escribe una base ortonormal respecto de la que f se represente en forma diagonal.

(d) (0,5 puntos) Escribe la matriz diagonal D, la matriz de paso ortogonal P y la relación entre ellas.

4. (1,5 puntos) De una aplicación lineal f sabemos que transforma el vector $\vec{v}_1=(-2,0)$ en el vector $\vec{w}_1=(1,3)$, y el vector $\vec{v}_2=(0,-3)$ en el vector $\vec{w}_2=(0,6)$. Calcula la matriz de f respecto de la base $\{(5,5)(-1,2)\}$.

5. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) (0,5 puntos) Un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas es siempre compatible indeterminado.

   (b) (0,5 puntos) Las ecuaciones cartesianas de un subespacio de $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x+y=0 \\ 5z=0 \end{cases}$ representan un subespacio de dimensión 0, es decir, $x=0, y=0, z=0$.

   (c) (0,5 puntos) Una matriz simétrica puede tener dos autovectores no ortogonales.

Normas del examen

- RAZONA TODAS las respuestas.
- NO se puede escribir a LÁPIZ ni en ROJO.
- Contesta TODAS las preguntas EN LOS HUECOS.
- Escribe tu nombre completo y el grupo en todas las hojas.

(1) Ec cartesianas $U_1 \equiv x - z = 0$

(a) Ec vect U_2 : $(x\ y\ z) = \alpha(1\ 2\ -3) + \beta(0\ 4\ 0)$

Ec param U_2 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 4\beta \\ z = -3\alpha \end{cases}$

Ec cartes. U_2 : $3) \to -2)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 4 & y \\ -3 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 4 & -2x+y \\ 0 & 0 & 3x+z \end{array}\right)$ (A, A^*)

Para que $r(A) = r(A^*) \Rightarrow 3x + z = 0 \leftarrow$ Ec cart U_2

Sol: Las ec cartesianas de $U_1 \cap U_2$ son $\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$

(b) Ec. param U_1 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow$ Un S.G de U_1 $\{(1\ 0\ 1)\ (0\ 1\ 0)\}$

Como $r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ son l.i $\{(1\ 0\ 1)\ (0\ 1\ 0)\}$ base U_1

Un S.G de U_2 es $\{(1\ 2\ -3)\ (0\ 4\ 0)\}$. Por (T) uniendo S.G de U_1 y U_2 obtenemos un S.G de $U_1 + U_2$.

Luego $\{(1\ 0\ 1)\ (0\ 1\ 0)\ (1\ 2\ -3)\ (0\ 4\ 0)\}$ S.G $U_1 + U_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Luego $\{(1\ 0\ 1)\ (0\ 1\ 0)\ (0\ 0\ -4)\}$ base $U_1 + U_2$

Como $\dim U_1 + U_2 = 3 \Rightarrow U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 \to$ valdría $B_c(\mathbb{R}^3)$

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

② (a) $f(100) = (1\ 4\ 0)$
$f(010) = (-2\ -5\ 1)$
$f(001) = (0\ 0\ 0)$

Sol: La matriz de f resp B_C es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $f(\overset{x}{2}\ \overset{y}{1}\ \overset{z}{0}) = (0,3,1) = \alpha_1(210) + \beta_1(0\ -3\ -2) + \gamma_1(003)$
$f(\overset{x}{0}\ \overset{y}{-3}\ \overset{z}{-2}) = (6,15,-3) = \alpha_2(\ ''\ ) + \beta_2(\ ''\ ) + \gamma_2(\ ''\ )$
$f(\underset{x}{0}\ \underset{y}{0}\ \underset{z}{3}) = (0,0,0) = \alpha_3(\ ''\ ) + \beta_3(\ ''\ ) + \gamma_3(\ ''\ )$

Sol: La matriz de f respecto de B_1 sería

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1/3 & -\frac{11}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La relación entre A y B $\overset{T}{\Rightarrow}$ $B = Q^{-1} A P$
siendo P matriz c. base $B_1 \to B_C$ y
siendo Q matriz c. base $B_1 \to B_C$
en este caso

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ B_C & \overset{A}{\rightsquigarrow} & B_C \\ P \uparrow & & \uparrow Q \\ B_1 & \overset{B}{\rightsquigarrow} & B_1 \end{array}$$

$$P = Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (e)$$

(d) Ec cartesianas $\operatorname{Ker} f$ $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x - 5y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\dim \operatorname{Ker} f \neq 0 \overset{T}{\Rightarrow} f$ no iny
$\dim \operatorname{Im} f \neq \dim$ esp. lleg $= 3$
$\Rightarrow f$ no sobre $\Uparrow$

S.G $\operatorname{Im} f = \{ \underset{(1\ 4\ 0)}{f(100)}\ \underset{(-2\ -5\ 1)}{f(010)}\ \underset{(000)}{f(001)} \}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 1$
$\overset{T}{\Uparrow}$

Como $r\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & +3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una base $\operatorname{Im} f$ sería $\{(1\ 1\ 0)\ (0\ +3\ 1)\}$ o bien $\{(1\ 4\ 0)\ (-2\ -5\ 1)\}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

EPS
Escuela Politécnica Superior
Universidad de Málaga

1er Apellido: _____
2º Apellido: _____
Nombre: PARC NOV 12 (I)
Asignatura: _____
D.N.I./N.I.E.: _____
Fecha: _____

2

Hoja nº: ___/___

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

(3) (a) fórula de f: $f(xyz) = (2x-y-2z, -x+2y-2z, -2x-2y-z)$

(b) Autovalores de A: $\begin{cases} \lambda=3 ; \ ma(3)=2 = mg(3) \\ \lambda=-3 ; \ ma(-3)=1 = mg(-3) \end{cases}$

Como A es simétrica $\Rightarrow$ A diag ortog ⇑

(c) Autovectores asociados a $\lambda=3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↓ Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ec cartesiana E_3: $\{ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Ec paramétricas E_3: $\begin{cases} x_1 = -2\alpha - \beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

Un S.G de E_3: $\{(-2\,0\,1), (-1\,1\,0)\}$

$\Rightarrow$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Base E_3: $\{\underbrace{(1\,-1\,0)}_{v_1}, \underbrace{(0\,-2\,1)}_{v_2}\}$. Como $\langle v_1, v_2 \rangle = 2 \neq 0$. Aplicamos G-S

$e_1 = v_1 = (1\,-1\,0)$

$e_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 e_1 \rangle}{\langle e_1 e_1 \rangle} e_1 = (0\,-2\,1) - \frac{2}{2}(1\,-1\,0) = (-1\,-1\,1)$

Compr $\langle e_1 e_2 \rangle = 0$ ✓ $\Rightarrow$ $\{e_1, e_2\}$ base ortog E_3

$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1\,-1\,0)}{\sqrt{2}} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$; $u_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{(-1\,-1\,1)}{\sqrt{3}} = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

$\{u_1, u_2\}$ b. ortonormal E_3

- Autovectores asoc. $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ Gauss

2) $-5)$ $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{24} & \cancel{-12} \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ec cartes E_{-3} $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -12x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2}\alpha - 2\alpha = \frac{1}{2}\alpha \\ x_2 = \frac{1}{2}\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

Un s.G de E_{-3} $\{(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1)\} \equiv \{\underbrace{(1\ 1\ 2)}_{= e_3}\}$ $\operatorname{cum} r(112) = 1$ base ortog E_{-3}

Cumpr (T) $\begin{cases} \langle e_1 e_3 \rangle = 0 \ \checkmark \\ \langle e_2 e_3 \rangle = 0 \ \checkmark \end{cases}$

Normalizamos $u_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ $\{u_3\}$ base ortonormal E_{-3}

Solve

Respecto de la base ortonormal $\{u_1\ u_2\ u_3\}$ f se representa en forma diagonal.

(d) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{array}$ $D = \underbrace{P^{-1}}_{= P^t} A P$

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

(4) Como $r\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}=2 \Rightarrow B_1=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base $\mathbb{R}^2$

$\vec{v}_1=(-2\,0)$ $\vec{v}_2=(0\,-3)$

Como $f(\vec{v}_1)=\vec{w}_1=(1\,3)$

$f(\vec{v}_2)=w_2=(0,+6)$ $\Rightarrow$ coord resp B_C

La matriz de f resp B_1 y B_C es:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & +6\end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{} & \mathbb{R}^2 \\ B_1 & \overset{B}{\rightsquigarrow} & B_C \\ P\uparrow & & \uparrow Q \\ B_2 & \overset{C}{\rightsquigarrow} & B_2 \end{array}$$

Si llamamos $B_2=\{(5\,5),(-1\,2)\}$ sabemos que la matriz C de f resp de B_2 cumple por (1) que $C=Q^{-1}BP$

siendo $\begin{cases} P \text{ c. base} & B_2 \to B_1 \\ Q \text{ " " } & B_2 \to B_C \end{cases}$

Cálculo de P: coord vectores de B_2 resp B_1

$$\left.\begin{array}{l}(5\,5)=\alpha_1(-2\,0)+\beta_1(0\,-3)\\ (-1\,2)=\alpha_2(-2\,0)+\beta_2(0\,-3)\end{array}\right\} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$$

$-2\alpha_1=5;\ \alpha_1=-5/2$
$-3\beta_1=5;\ \beta_1=-5/3$
$-2\alpha_2=-1;\ \alpha_2=1/2$
$-3\beta_2=2;\ \beta_2=-2/3$

$$P=\begin{pmatrix}-5/2 & 1/2\\ -5/3 & -2/3\end{pmatrix}$$

Cálculo de Q: $Q=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

Solución: La matriz de f respecto de B_2 es:

~~Luego~~ $C=Q^{-1}BP=\begin{pmatrix}-3/2 & -1/10\\ -5 & -1\end{pmatrix}$

(5) a) La matriz de los coeficientes A será 3×2 y la ampliada A^* 3×3. El sistema puede ser incompatible

FALSO

Por ejemplo
$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=2 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \text{ Sist Incomp}$$

También puede ser CD: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$

b) Ec cortes $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$ Ec paran $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ t=0 \end{cases}$

FALSO

c) Siempre que estén asociados al mismo autovalor pueden ser no ortogonales. Por ejemplo, ~~en el~~ ejercicio 3, los autovectores en el asociados a $\lambda=3$, v_1 y v_2 no son ortogonales.

VERDADERO