Espacios Vectoriales y Aplicaciones Lineales.

Jordan → Hace 0's y 1's

Gauss → Forma escalonada

* sistema general de m ecuaciones y n incognitas.

Gauss-Jordan → Forma escalonada reducida

Espacios Vectoriales

Donde estamos: V → conjunto cuyos elementos son vectores con operaciones.

Vectores de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Suma:
  - conmutativa
  - Asociativa
  - ∃ neutro
  - ∃ opuesto de $\bar{v}$.
- Multiplicación por un nº Real:
  - Pseudoasociativa
  - Pseudodistributiva
  - ∃ elemento unidad.

$(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ → Todo conjunto suma, multiplicación de nº Reales que tengan esas propiedades son conjunto de vectores

Subespacios Vectoriales.

- $\forall \bar{u}, \bar{v} \in S \quad \bar{u} + \bar{v} \in S$
- $\forall t \in S \quad \bar{v} \in S \quad t \cdot \bar{v} \in S$

Suma de subespacios

→ Suma = Paramétricas

Dado S_1, S_2 subespacios de $\mathbb{R}^n$, la "suma"

$S_1 + S_2 = \{\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ con $\bar{v}_1 \in S_1, \bar{v}_2 \in S_2\}$ tambien lo es.

Intersección de subespacios

→ Intersección = cartesianas

Dados S_1, S_2 subespacios de $\mathbb{R}^n$, entonces $S_1 \cap S_2$ tb lo es

Cambios de base:

$$\boxed{B_1 X_1 = B_2 t_2}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Transformación Lineal

$f: V \to W$ es transf. lineal si:

- $f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$
- $f(\lambda \bar{u}) = \lambda f(\bar{u})$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{P_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{P_2} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$C$$

$$\boxed{C = P_2 \cdot A \cdot P_1^{-1}}$$

Núcleo:

el Núcleo de f es $= \{\bar{v} \in V \,/\, f(\bar{v}) = 0\}$

Imágen:

la Imágen de f es $= \{\bar{w} \in W \,/\, \exists\, \bar{v} \in V \,/\, f(\bar{v}) = \bar{w}\} \rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = rg(A)$

Inyectiva:

Si al calcular el Núcleo da 0 es inyectiva

Sobreyectiva:

cuando $\dim(\mathrm{Im} f) =$ espacio de llegada (dimensión)

Teorema de dimensión:

$\dim(m) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

Biyectiva o Isomorfismo

cuando es Inyectiva y sobreyectiva.

Diagonalización de Endomorfismos

(Aplicación lineal de V en V)

$f: V \to V$ se dice que λ es un valor propio y que
$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ v es un vector asociado a λ.

Matriz de paso.

colocando los vectores propios en vertical.

Fórmula importante:

$$A = PDP^{-1}$$

D se hace colocando los valores propios en la diagonal.

Importante:

Si los valores propios son de multiplicidad $\neq 1$, sólo será diagonalizable si es posible obtener el mismo número de vectores propios que de multiplicidad.

Subespacio propio:

Si λ es un valor propio y $\bar{v}_{1\lambda}, \bar{v}_{2\lambda} \ldots \bar{v}_{n\lambda}$ son sus vectores propios: $E_\lambda = \langle \bar{v}_{1\lambda}, \bar{v}_{2\lambda} \ldots \bar{v}_{n\lambda} \rangle$

Vectores: Espacio Vectorial Puntos: Espacio Afín

Espacio Afín:

$\mathbb{R}^n$ conjunto de puntos
V_n espacio de vectores de dim n.
Suma Afín +

$$+ : (\mathbb{R}^n, V_n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(p, v) \longrightarrow p + v = q \;/\; \overrightarrow{pq} = \bar{v}$$

Subespacio Afín:

Dado S subespacio vectorial
Dado p punto

$$p + S = \{ p + v \;/\; \bar{v} \in S \}$$

Si dim S=1 p+S recta (Afín)
dim S=2 p+S plano

Producto Vectorial.

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} \times \bar{b} := \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Producto escalar en $\mathbb{R}^n$

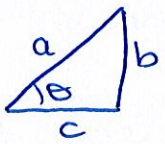
$$(\bar{v},\bar{w}) \longmapsto \bar{v}\cdot\bar{w} := v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n$$

si: $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0 \rightarrow$ son perpendiculares

Haz de planos que pasa por r.

$$(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3) + \lambda(A'x_1 + B'x_2 + C'x_3) = 0$$

Teorema del coseno



$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\cos(\widehat{v,w}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

→ Para calcular **Areas** solo hay que hacer determinantes

→ Para **Volumenes** utilizamos el producto mixto

Proyección en $\mathbb{R}^2$

$$\vec{p} = \frac{v\cdot w}{w\cdot w}\cdot\bar{w}$$

Proyección en $\mathbb{R}^3$ (plano → tiene que pasar por 0).

$$\vec{p} = A(A^tA)^{-1}A^t\,\vec{b}$$

Transformaciones Afines.

Ecuación de una Transf. Afín.

$$Y = A\vec{X} + \vec{b}$$

Formula de los puntos fijos

$$\vec{X} = (I - A)^{-1} \cdot \vec{b}$$

Clave para calcular la reflexión:

$$2\vec{Pv} - \vec{v}$$

Simetría:

$$A = A^t$$

Matriz ortogonal

$$C^t = C^{-1}$$

Diagonalización ortogonal:

$$D = C^t A C$$

Formula de la Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fórmula de la Parábola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cónicas:

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \rightarrow$ Parábola

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \rightarrow$ Elipse

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow$ Hipérbola

Nota: Cuando el determ. de los vectores normalizados es negativo, se hace una reflexión y un giro.

Cuadráticas:

Formulas en el folio.

Generalización producto escalar.

$\bar{v} \cdot \bar{w}$

$(\lambda \bar{v}) \cdot \bar{w} = \lambda (\bar{v} \cdot \bar{w})$

- Producto Interno:

$$\bullet := V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto \bar{v} \cdot \bar{w}$$

- Propiedades:

$\bar{v} \cdot \bar{v} > 0$ si $V \neq 0$

$\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v} \rightarrow$ Conmutativo

$(\bar{v} + \bar{w})\bar{u} = \bar{v}\bar{u} + \bar{w}\bar{u} \rightarrow$ Distributivo

$(\lambda \bar{v})\bar{w} = \lambda (\bar{v} \cdot \bar{w})$

Producto escalar:

$$\bar{p}\cdot\bar{q} := \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$$

Teorema:

matriz del producto escalar respecto a la base $\{V_1, V_2\}$

Tenga la base $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2\}$

$$v\cdot w = (x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2)(y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2) = \dots = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 \\ v_2v_1 & v_2v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

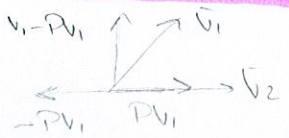
coseno que forma un polinomio.

$$\cos\widehat{(3+x)(4+2x)} = \frac{\int_0^1 (3+x)(4+2x)\,dx}{\sqrt{\int_0^1 (3+x)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 (4+2x)^2 dx}}$$

ortonormal.

- Que forme 90° ($\perp$)
- Que cada uno valga 1.

* Proceso Gram-schmidt (Ejemplo):



si no me mide 1 lo divido por sí mismo.

si $\bar{v}_1 = 1$; $\bar{v}_2 = x$. entonces:

$$P_1 = \frac{1\cdot x}{x\cdot x}\,x = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx}\,x \rightarrow Pv_1 = \frac{3}{2}x$$

Para que sea perpendicular a X es:

$$1 - 3/2\,x = v_1 - Pv_1$$

La base buscada es:

$$\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 x\cdot x\,dx}}\,x,\ \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 (1-3/2\,x)\,dx}}\,(1-3/2\,x) \rightarrow \left(\sqrt{3}\,x,\ \frac{1}{\sqrt{4}}(1-3/2\,x)\right)$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

$$h = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2}, \bar{v}_1, \bar{v}_2]|}{\|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\|}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

$$h = \frac{\|v \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}$$

SISTEMA DE ECS. DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS.

Teorema:

Dado el sistema $X'(t) = A\,\bar{X}(t)$ con condiciones iniciales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}}_{\bar{C}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

entonces su solución es:

$$\bar{X}(t) = e^{At} \cdot \bar{C}$$

caso 1.

si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$

caso 2.

si $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$

caso 3.

si A es diagonalizable → no diagonal.

$A = PDP^{-1}$

caso 4.

si A es diagonalizable con complejos.

caso 5.

si A no es diagonalizable

Teorema:

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$$

conclusión: la solución será:

$$\boxed{\bar{X}(t) = P e^{Dt} P^{-1} \cdot \vec{C}}$$