Cálculo. 1 de febrero de 2011

Apellidos: _____ **Nombre:** _____

Especialidad: _____ **Grupo:** _____ **D.N.I :** _____

1. Calcula las partes real e imaginaria del número complejo $(1+i)\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en 0 de la función:

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2 + 2x^3}{1 - x + x^2 + \operatorname{sen} x}$$

3. Se considera la región comprendida entre la recta horizontal $y = 7$, la parábola $f(x) = -x^2 + 16$, el eje X y el eje Y. Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar dicha región alrededor del eje X.

4. Halla el término general $\sum_0^\infty a_n\, x^n$ de la serie de potencias

$$\frac{\cos\frac{1}{2}}{4}x - \frac{\cos\frac{1}{4}}{9}x^2 + \frac{\cos\frac{1}{6}}{16}x^3 - \frac{\cos\frac{1}{8}}{25}x^4 + \cdots$$

y estudia su convergencia para los valores de x.

5. Dada la función

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$$

   (a) Prueba que el límite no existe en $(0,0)$.

   (b) Halla una trayectoria $y = g(x)$ para la cual el límite en $(0,0)$ valga $\frac{1}{5}$.

6. Para la función

$$f(x,y) = \sqrt{6 - |x - y|},$$

   (a) Halla y dibuja en el plano su dominio.

   (b) Halla y dibuja en el plano sus curvas de nivel.

7. Sea la superficie

$$x + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{z^2} - \frac{11}{4} = 0$$

   (a) Halla el punto que pertenezca a la superficie y en el cual el vector normal es proporcional al vector $(4, 8, 1)$.

   (b) Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la función definida implícitamente $z = f(x,y)$.

   (c) En el punto obtenido en el apartado (a), calcula el plano tangente.

8. Halla las dimensiones de una caja rectangular sin tapa con volumen 1 y superficie mínima.

1) $(1+i)\,e^{i\pi/3} = (1+i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}$

$= \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} + i\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

La parte entera es $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ la parte imaginaria es $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

---

2) $\mathrm{sen}\,x \rightsquigarrow x - \frac{x^3}{3!} + \dots$, $\quad 1 - x + x^2 + \mathrm{sen}\,x \rightsquigarrow 1 - x + x^2 + x - \frac{x^3}{3!} + \dots =$

$= 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^3$

Procediendo con la división larga

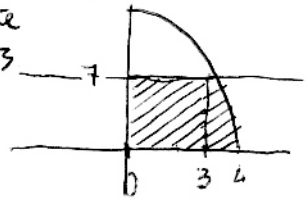
$$\begin{array}{l|l}
1 - x + x^2 + 2x^3 \dots & 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^3 \\
\hline
-1 \quad 0 - x^2 + \frac{1}{6}x^3 \dots & 1 + x + \frac{19}{6}x^3 + \dots \\
\quad -x \quad + \frac{13}{6}x^3 & \\
\quad\ \ x \quad + x^3 & \\
\hline
\qquad\qquad \frac{19}{6}x^3 &
\end{array}$$

El polinomio es $1 + x + \frac{19}{6}x^3$

---

3) El área rayada en la figura es la que gira alrededor del eje x:

El punto corte es en $x=3$



La integral es

$$V = \pi\int_0^3 7^2\,dx + \pi\int_3^4 (-x^2+16)^2\,dx = \dots$$

---

4) $\frac{\cos 1/2}{4}x - \frac{\cos 1/4}{9}x^2 + \frac{\cos 1/6}{16}x^3 - \frac{\cos 1/8}{25}x^4 + \dots = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{1}{2n}}{(n+1)^2}\,x^n$

El estudio de su convergencia se hace conforme al criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{2n+2}\cdot(n+1)^2}{\cos\frac{1}{2n}\cdot(n+3)^2}\,|x| = 1\cdot|x| \;;\quad |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

El intervalo de convergencia es $(-1,1)$. Para determinar el campo verificamos la convergencia en los puntos 1 y -1:

En 1 la serie resulta $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{1}{2n}}{(n+1)^2}$ que al tratarse de una sucesión alternada con $\frac{\cos 1/2n}{(n+1)^2}$ decreciente, satisface el criterio de Leibnitz y por tanto converge.

En 2 la serie resulta $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{1}{2n}}{(n+1)^2}(-1)^n = \sum_1^\infty (-1)^{2n+1}\frac{\cos\frac{1}{2n}}{(n+1)^2} = -\sum_1^\infty \frac{\cos\frac{1}{2n}}{(n+1)^2}$ que tambien converge por ser menor que la serie $\sum_1 \frac{1}{n^2}$ que sí lo hace por tener el denominador grado 2 superior a 1.

El campo de convergencia es $[-1,1]$.

---

5) a) La función no tiene límite en $(0,0)$. La trayectoria $y=x$ se acerca a 0: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1} = 0$ y la trayectoria $y=x^2$ se acerca $y=x$ a $1/2$: $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x^4}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

b) La trayectoria que hace el límite $1/5$ es $y = 2x^2$.

7) a) El gradiente de la superficie de nivel de $x+\frac{y^2}{2}-\frac{1}{z^2}-\frac{11}{4}=0$ está en la misma dirección que $(4,8,1)$ por tanto:

$\vec{\nabla}F(x,y,z)=\lambda(4,8,1)$, es decir $\left(1,y,\frac{2}{z^3}\right)=\lambda(4,8,1)$ que nos proporciona las ecuaciones

$$\begin{cases} 1=4\lambda \Rightarrow \lambda=1/4 \\ y=8\lambda \Rightarrow \boxed{y=2} \\ 2/z^3=\lambda \Rightarrow \boxed{z=\sqrt[3]{2/\lambda}=\sqrt[3]{8}=2} \\ x+y^2/2-1/z^2-\frac{11}{4}=0 \;;\; x=11/4+1/4-2^2/2=4/4=1 \end{cases}$$

El punto es $(1,2,2)$

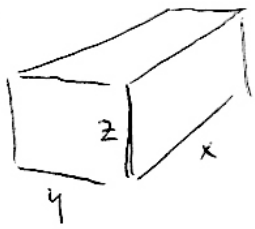
c) El plano tangente en el punto es perpendicular al vector $\vec{\nabla}F(1,2,2)=(1,2,1/4)$ Por tanto resulta de $(x-1,y-2,z-2)\cdot(1,2,1/4)=0$

b) Las expresiones de las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{1}{2/z^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{y}{2/z^3}$$

---

8)



Puede hacerse directamente definiendo $f(x,y)$ función del área que hay que minimizar:

$$f(x,y)=xy+2xz+2yz=xy+2x\frac{1}{xy}+2y\frac{1}{xy}=xy+\frac{2}{y}+\frac{2}{x}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y-\frac{2}{x^2}=0, \quad y=2/x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-\frac{2}{y^2}=0, \quad x-\frac{2}{(2/x^2)^2}=0 \;;\; \dots \; \underline{x=\sqrt[3]{2}} \;;\; \underline{y=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}} \;;\; z=\sqrt[3]{1/4} \end{cases}$$

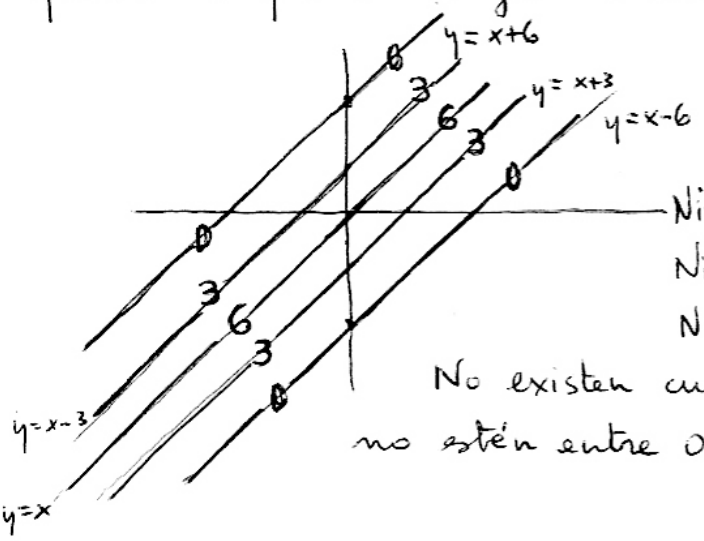
Tambien puede plantearse el lagrangiano para resolverlo:

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz-\lambda(xyz-1)$$

en este caso despejar x,y,z es algo más laborioso.

---

6) a) El dominio es $Df=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 6-|x-y|>0\}$. Resolvemos la inecuación para dibujar la región: $|x-y|<6 \Leftrightarrow -6<x-y \wedge x-y<6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y<x+6 \wedge y>x-6$ cuya intersección es la franja. b) Las curvas de nivel son rectas. Los límites de la franja son las rectas de nivel 0:



Nivel 0: $6-|x-y|=0 \Rightarrow y=x-6 \wedge y=x+6$

Nivel 3: $6-|x-y|=3 \Rightarrow y=x-3 \wedge y=x+3$

Nivel 6: $6-|x-y|=6 \Rightarrow y=x$

No existen curvas de nivel para valores que no estén entre 0 y 6.

fin