Málaga 30-9-10

CÁLCULO

· Profesor:

José Luis Leal Ruperto

jlleal r @ hotmail.com

· Programa a utilizar:

WXMÁXIMA

· Página web:

www. matleal . wordpress

· Tutorías:

Miercoles y Jueves 18.00 - 20.00

Despacho: 3.020

→ Grupo 2.

· Libro recomendado:

"cálculo para la ingeniería"

Autor: Manuel Gea Aciego

Ed: Agora.

1'5 → Exámen de Maxima (después de Navidad)

2'5 → Notas de clase

6 → Nota Final

TEMA 1: Nºs REALES Y COMPLEJOS.

→ Valor absoluto:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

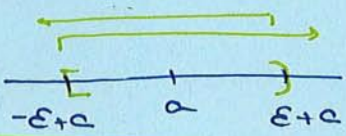
1. $-|x| \leq x \leq |x|$

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3. a. $\boxed{x / |x-a| \leq \varepsilon}$

Equivale a:

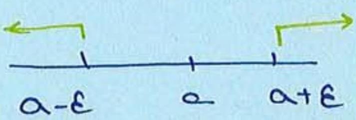
$$-\varepsilon \leq x-a \;\overset{y}{\wedge}\; x-a \leq \varepsilon$$
$$-\varepsilon + a \leq x \;\wedge\; x \leq \varepsilon + a$$



b. $\boxed{x / |x-a| > \varepsilon}$

Equivale a:

$$-\varepsilon > x-a \;\overset{o}{\vee}\; x-a > \varepsilon$$
$$-\varepsilon + a > x \;\vee\; x > \varepsilon + a$$



→ Fracciones:

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb + qa}{q \cdot b}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{pb - qa}{qb}$$

(Nºs complejos)

suma $(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$

multiplicación:

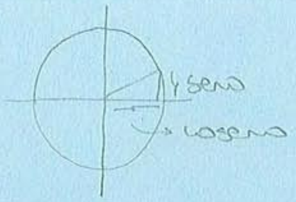
$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$

→ Nº i:

$i=\sqrt{-1}$

$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$

→ Trigonometría:



	0	π/6 30°	π/4 45°	π/3 60°	π/2 90°
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$\text{sen}(A+B)=\text{sen}A\cos B+\text{sen}B\cos A$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\text{sen}A\,\text{sen}B$

→ Definición:

$z=x+iy$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$x+iy=(|z|\cos\theta+i|z|\text{sen}\theta)=|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$

$$\boxed{x+iy=|z|(\cos(\theta+2k\pi)+i\text{sen}(\theta+2k\pi))}$$

→ Potencia de un complejo: Fórmula Moivre.

$$[|z|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)]^n=|z|^n(\cos n\theta+i\text{sen}\,n\theta)$$

→ Raíces:

$$\sqrt[n]{z}=z^{1/n}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

→ Exponencial:

$\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$

$e^x=A\rightarrow \ln A=x$

$$\boxed{e^z=e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y)}$$

Notación Euler: $|r|e^{i\theta}=|r|(\cos\theta+i\text{sen}\theta)$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad \text{sen}\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

→ Logaritmos:

$\ln z=\ln|z|+i\theta+2\pi k$; $z_1^{z_2}=e^{z_2\ln z_1}$

RESUMEN: TEMA 1. N'S REALES Y COMPLEJOS.

Valor Absoluto.

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

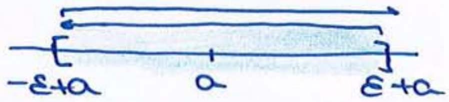
① $-|x| \leq x \leq |x|$

② $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

③ a. $x \,/\, |x-a| \leq \varepsilon$

$-\varepsilon \leq x-a \;\wedge\; x-a \leq \varepsilon$

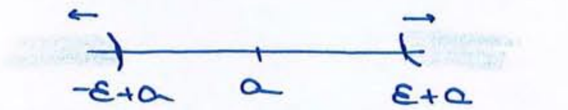
$-\varepsilon + a \leq x \;\wedge\; x \leq \varepsilon + a$



b. $x \,/\, |x-a| > \varepsilon$

$-\varepsilon > x-a \;\vee\; x-a > \varepsilon$

$-\varepsilon + a > x \;\vee\; x > \varepsilon + a$



Fracciones.

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb + qa}{qb} \qquad \frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{pb - qa}{qb}$$

El número i.

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

Suma complejos:

$(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$

Multiplicación de complejos:

$(a+bi)(a'+b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Trigonometría (Recordatorio).

	0	$30°$ ($\pi/6$)	$45°$ ($\pi/4$)	$60°$ ($\pi/3$)	$90°$ ($\pi/2$)
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A \cos B + \operatorname{sen}B \cos A$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$

Definición de complejo:

$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\boxed{x + iy = |z|\left(\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2k\pi)\right)}$$

Potencia de un complejo: Fórmula de Moivre

$$\boxed{\left[|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\right]^n = |z|^n\left(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right)}$$

Raíces

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)}$$

Exponencial

$e^x = A \rightarrow \ln A = x$

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y) = e^{x+iy}}$$

Notación Euler.

$$\boxed{|r|e^{i\theta} = |r|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

Cosenos y senos:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Logaritmos

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)}$$

$$\boxed{z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}}$$

NATURALEZA DE LOS Nºs REALES.

→ Nºs Naturales:

$\mathbb{N}\ \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

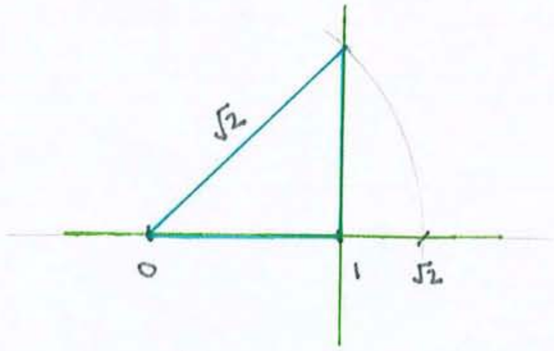
→ Nºs Enteros:

$\mathbb{Z}\ \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

→ Nºs Racionales:

$\mathbb{Q}\ \{\frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$

TEOREMA: El nº $\sqrt{2}$ no es fracción.



Demostración por reducción al absurdo: Partir de lo contrario de lo que quiero demostrar.

DEMO: Supongo que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (fracción irreducible)

$2 = \frac{p^2}{q^2}$; $p^2 = 2q^2$

p^2 es par (porque es 2 por algo)

si p^2 es par → p es par, porque si no lo fuese sería impar:

$p = 2k+1 \rightarrow p^2 = (2k+1)^2$

$p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1$

luego $p = 2k$ es par

$p = 2K$, sustituyo:

$$(2K)^2 = 2q^2 \; ; \; 4k^2 = 2q^2 \; ; \; q^2 = 2k^2$$

q^2 es par $\rightarrow$ q es par.

Por la demo al absurdo se comprueba que el teorema no es cierto.

→ Nºs Irracionales:

$\mathbb{I}$ { (nº decimales que no proceden de una fracción)

2, - - -

Expansión decimal: (siempre se repite).

fracción generatriz: 0'14572574

$$0'14572574$$

$$\frac{14572574 - 14572}{99900000}$$

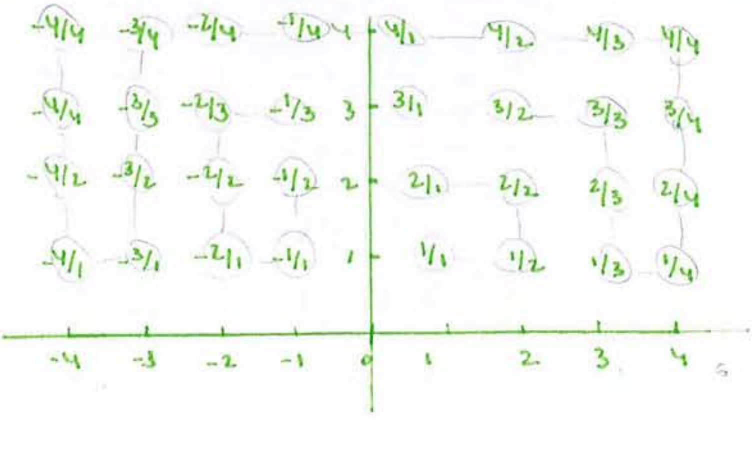
Ejplos: 0'030030003...

0'24681012...

Pero si hacemos aproximaciones aparecen fracciones

$$\mathbb{Q} = \frac{24681012}{100000000}$$

¿Qué infinito es más grande? ¿$\mathbb{I}$ ó $\mathbb{Q}$?



Anécdota:

Debe unirse $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots$

$\mathbb{Q} = \{$

FORMA DE REPRESENTAR LOS N°S REALES

→ Valor Absoluto

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejplo: $|-7| = -(-7) = 7$

Propiedades:

1. $-|x| \leq x \leq |x|$

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

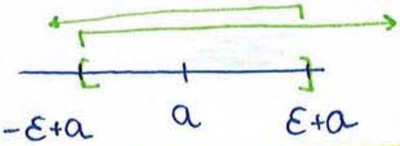
3. ⓐ $\boxed{x / |x-a| < \varepsilon}$

Equivale a:

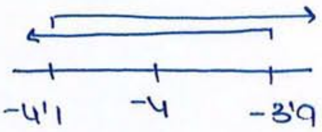
"y"

$-\varepsilon \leq x-a \wedge x-a \leq \varepsilon$

$-\varepsilon + a \leq x \wedge x \leq \varepsilon + a$



Ejplo: $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+4| < 0'1\} = (-4'1, -3'9)$



ⓑ.

Ejplo: $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

Unión

intersección

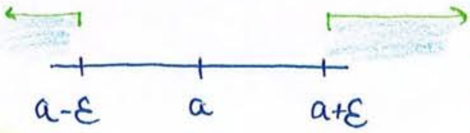
$\boxed{x / |x-a| > \varepsilon}$

Equivale a:

"ó"

$-\varepsilon > x-a \vee x-a > \varepsilon$

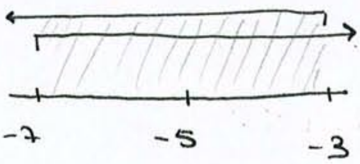
$-\varepsilon + a > x \vee x > \varepsilon + a$



PROBLEMAS TEMA 1.

Problema 2. Representar en la Recta:

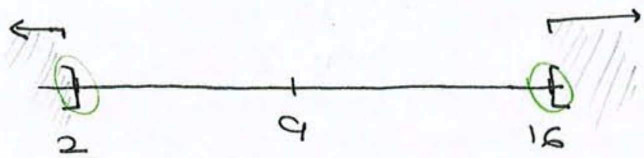
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x+5| < 2\}$ $\quad (-7, -3)$



$-2 < x+5 \quad \wedge \quad x+5 < 2$

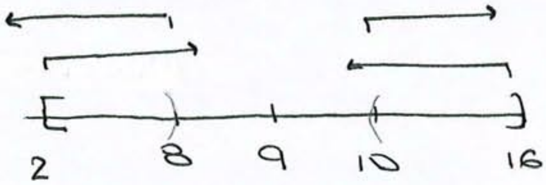
$-7 < x \quad \wedge \quad x < -3$

b. $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-9| \geq 7\}$ $\quad (-\infty, 2] \cup [16, \infty)$



por tiene (=)

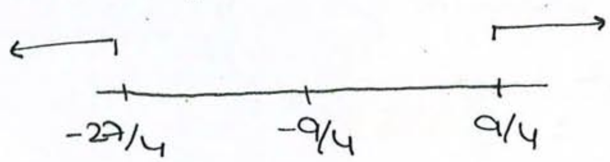
c. $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < |x-9| \leq 7\}$ $\quad [2, 8) \cup (10, 16]$



d. $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |4x+9| > 18\}$

$$\left|4 \cdot \left(x + \frac{9}{4}\right)\right| > 18$$

$$|4| \cdot \left|x + \frac{9}{4}\right| > 18 \rightarrow \left|x + \frac{9}{4}\right| > \frac{18}{4}$$



$$(-\infty, -27/4) \cup (9/4, \infty)$$

e. $E=\{x\in\mathbb{R} \,/\, |4x-9|\geq 18x\}$

$|x|>A$

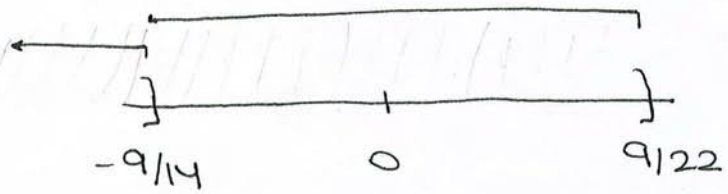
$-A>x \;\vee\; x>A$

$|4x-9|\geq 18x$

$-18x \geq 4x-9 \;\vee\; 4x-9\geq 18x$

$-22x \geq -9 \;\vee\; -9 \geq 14x$

$x \leq \frac{9}{22} \;\vee\; -9/14 \geq x$



$(-\infty, 9/22]$

Málaga 4-10-10

Problema 1.

(a) $1-\sqrt{2}$ irracional, no es fracción.

$\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$

no puede ser fracción ya que...

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{p}{q}+\frac{a}{b} &= \frac{pb+qa}{q\cdot b} \\ \frac{p}{q}-\frac{a}{b} &= \frac{pb-qa}{qb} \end{aligned}}$$

TEORÍA.

$\frac{1}{1}-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ no es una fracción.

TEOREMA: "$1-\sqrt{2}$ no es fracción"

Al absurdo: supongo que $1-\sqrt{2}$ sí lo es. entonces $\frac{1}{1}-(1-\sqrt{2})$ sería resta de fracciones y por tanto fracción, pero $\frac{1}{1}-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}$, que no lo es.

¡CONTRADICCIÓN!

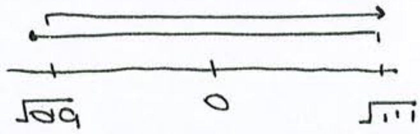
Problema 3.

$|x^2 - 1| < 0'1$

$-0'1 < x^2 - 1 \quad \wedge \quad x^2 - 1 < 0'1$

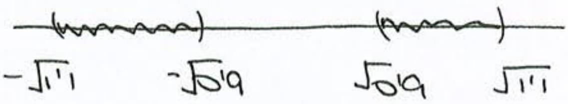
$0'9 < x^2 \quad \wedge \quad x^2 < 1'1$

$+\sqrt{0'9} < x \quad \wedge \quad x < \sqrt{1'1}$



$0'9 < x^2 \qquad \sqrt{0'9} < x \quad \vee \quad -\sqrt{0'9} > x$

$x^2 < 1'1 \qquad x < \sqrt{1'1} \quad \vee \quad x > -\sqrt{1'1}$



Problema 4.

$x \in [0'9, 1'1] \qquad |x^2 - 1| < 0'3$

$|x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1|\,|x-1| < 2'1 \cdot |x-1| <$

$< 2'1 \cdot 0'1 = 0'21 < 3$ si $\in$

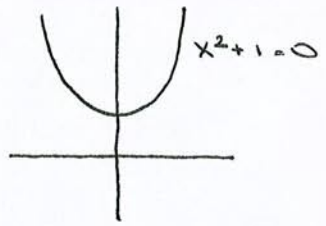
LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

$\sqrt{-1} = i$

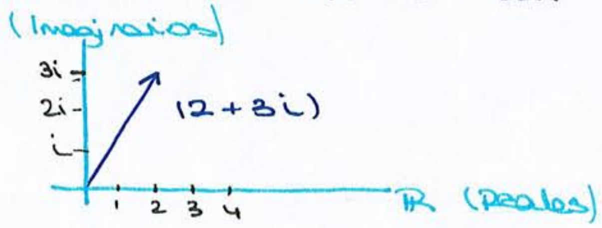
$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x = \sqrt{-1} = i$



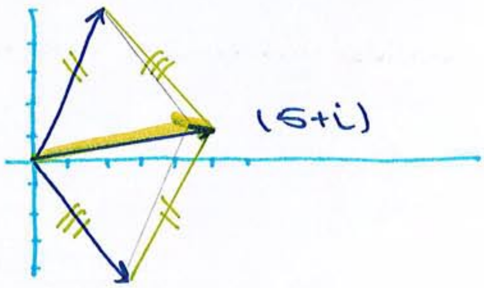
conjunto C, conjunto complejo cuyos elementos a+bi con a real b real.



Suma:

$(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (bi+b'i)$

eplo: $(2+5i) + (3-4i) = (5+i)$



Multiplicación

$(a+bi)(a'+b'i) = a \cdot a' + ab'i + bia' + bb'ii$

$i = \sqrt{-1}$

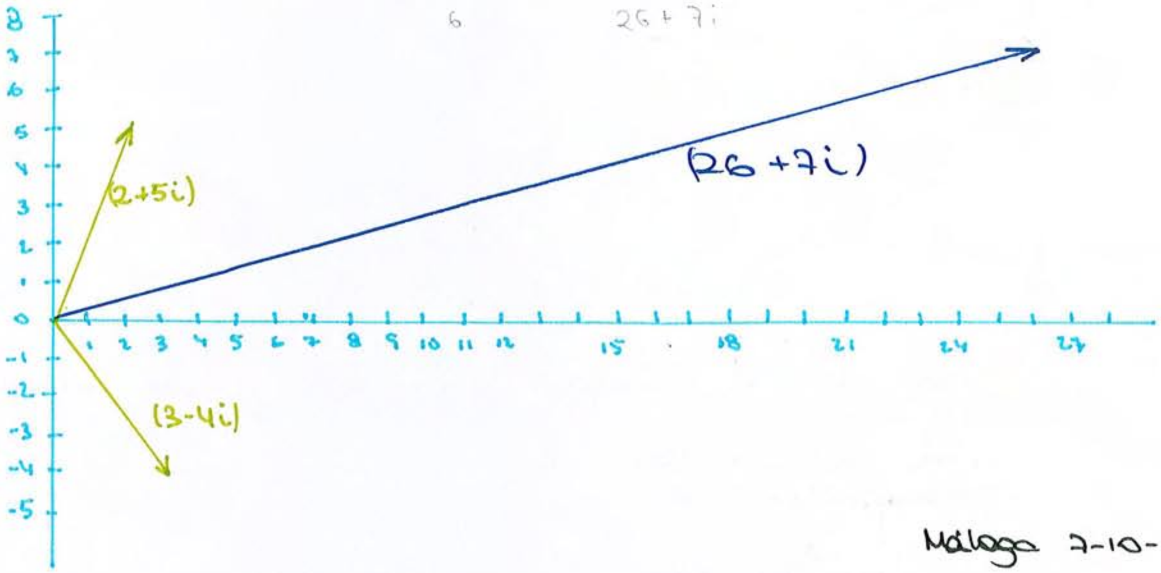
$i^2 = (\sqrt{-1})^2$

$i^2 = -1$

$$\boxed{= (aa' - bb') + (ab' + ba')i}$$ multiplicación

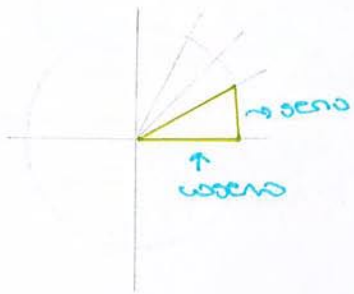
Ejplo: $(2+5i)(3-4i) = (26+7i)$

$23 + 8i + 15i + 20$
$6 \qquad 26 + 7i$



Málaga 7-10-10

- Breve Resume: Trigonometria.



	0	$\pi/6$ 30°	$\pi/4$ 45°	$\pi/3$ 60°	$\pi/2$ 90°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$360° = 2\pi$ (rad) — grados centesimales (→ no se utilizan) → 400°

grados sexagesimales → DEG; rad → RAD

sen 225° → $-\sqrt{2}/2$ cos 225° → $-\sqrt{2}/2$

Ejplo: $tg\ \frac{-23\pi}{4}$

17 | 3 → 2, 5; $17 = 5 + 2/3$ -17 | 3 → 1, 6; $-6 + 1/3 = -17$

$$-\frac{23\pi}{4} = -6\pi + \frac{\pi}{4}$$

3 veces 2π (2π → 1 vuelta)

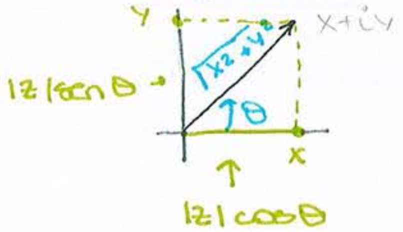
$$tg\left(\frac{-23\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} - 3 \cdot 2\pi\right) = 1$$

$tg\ \pi/4 = 1$

Formulas:

$$\boxed{\begin{array}{l} sen(A+B) = senA\cos B + sen B\cos A \\ \cos(A+B) = \cos A\cos B - senA\, senB \end{array}}$$

Definición:



• <u>Módulo</u>: de $z = x+iy$ es

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x+iy = (|z|\cos\theta + i\,|z|\,\text{sen}\,\theta) = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

θ = <u>Argumento principal</u>.

si $-\pi \le \theta \le \pi$

$$x+iy = |z|\,(\cos(\theta+2k\pi) + i\,\text{sen}\,(\theta+2k\pi))$$

Ejplo:

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

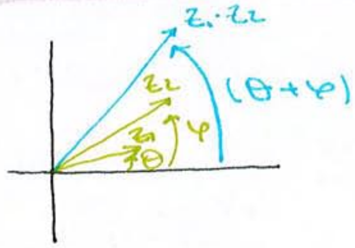
$$z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$\boxed{z_1\cdot z_2 =} \ |z_1||z_2|\,(\cos\theta\cos\varphi + i\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + i\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi\ -$$

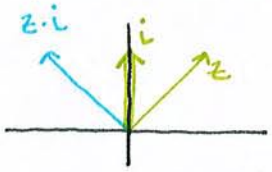
$$-\ \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi) = \qquad -1 = i\cdot i$$

$$= |z_1||z_2|\,(\cos\theta\cos\varphi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + i(\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\theta\cos\varphi))$$

$$= |z_1||z_2|\,(\cos(\theta+\varphi) + i\,\text{sen}\,(\theta+\varphi))$$



Si multiplico cualquiera por i:



· <u>División</u>:

$$z = x+iy = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$ → Forma trigonométrica ó Forma polar.

Ejplo: $$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{(15-2)+(10+3)\,i}{25+1} =$$

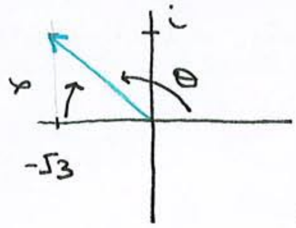
se multiplico por su conjugado.

$$= \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$ → Forma binómica

?

① Expresar en forma trigonométrica $z = \sqrt{3+1^2} = 2$

$(-\sqrt{3} + i)$



$x = -\sqrt{3}$

$y = 1$

$|z| = 2$

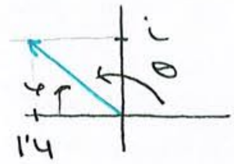
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0'577\ldots = \operatorname{tg} 30°$ $\quad tg^{-1}$

$180° - 30° = 150°$

$\boxed{\theta = 150°}$

$-\sqrt{3} + i = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

$(-1'4 + i)$



$z = \sqrt{(1'4)^2 + 1^2} = \sqrt{2'96} = 1'76$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{-1'4} = -0'71 \qquad \operatorname{arctg}(-0'71) = 35'53$

$\theta = 144'47$

$(-1'4 + i) = \sqrt{2'96}(\cos 144'47 + i \operatorname{sen} 144'47)$

$7\left(\cos \frac{-7\pi}{4} - i \operatorname{sen} -\frac{7\pi}{4}\right)$

$x + iy$

$\begin{array}{r|l} -7 & 4 \\ 1 & 2 \end{array} \rightsquigarrow (-2 + 1/4) = -7/4$

$-\frac{7\pi}{4} = \underbrace{-2\pi}_{\text{Esto es indiferente}} + \frac{1}{4}\pi$ Importante

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 7(\cos 45° - i \operatorname{sen} 45°) = 7\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2} i$

· Potencia de un complejo:

$[|z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^2 = |z|^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$

→ Fórmula de Moivre:

$$\boxed{[|z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}$$

$(-\sqrt{3}+i)^{10}$

$(-\sqrt{3}+i) = 2(\cos 150° + i\,\mathrm{sen}\, 150°)$

$(-\sqrt{3}+i)^{10} = 2^{10}(\cos 1500° + i\,\mathrm{sen}\, 1500°)$

$1500 \,\underline{|360}$; $\underline{60}$ $\;4$ → Da 4 vueltas y sobran 60°

$(-\sqrt{3}+i)^{10} = 2^{10}(\cos(60° + 4 \cdot 360°) + i\,\mathrm{sen}(60° + 4 \cdot 360°))$

$= 1024(1/2 + i\,\sqrt{3}/2) = 512 + i\,512 \cdot \sqrt{3}$

· Raíces n-ésimas:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

Ejplo: $\sqrt[3]{1}$

$$\sqrt[3]{1} = 1^{1/3}\left(\cos \frac{\theta + k2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\, \frac{\theta + k2\pi}{3}\right)$$

$1 + 0i = 1(\cos(0 + k2\pi) + i\,\mathrm{sen}(0 + k2\pi))$

$\boxed{k=0}$

$z_0 = 1^{1/3}(\cos 0° + i\,\mathrm{sen}\, 0°) = 1$

$\boxed{k=1}$

$z_1 = 1^{1/3}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\, \frac{2\pi}{3}\right) = 1(-1/2 + i\,\sqrt{3}/2)$

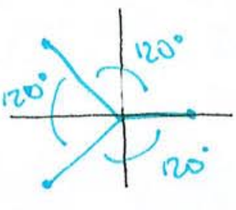
$= -1/2 + \sqrt{3}/2\, i$ $\qquad \cos 60 = 1/2$

$\boxed{k=2}$

$z_2 = 1^{1/3}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\, \frac{4\pi}{3}\right) = 1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1}{2}\right)$

$= \left(-\sqrt{3}/2 - i\,\frac{1}{2}\right)$ $\qquad \mathrm{sen}\, 240 = -\sqrt{3}/2$

Representamos los 3 complejos:

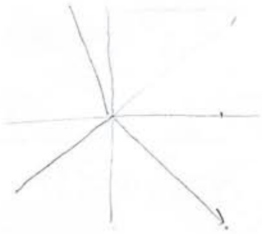


$k=3 \rightarrow k=0$

$k=4 \rightarrow k=1$ ...

T2.3 (1)

Ejercicio: $\sqrt[3]{(1-i)}$



$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$tg \frac{1}{1} \rightsquigarrow \theta = 45^\circ$

$$\sqrt[3]{(1-i)} = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \left(\frac{-\pi/4 + k2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{-\pi/4 + k2\pi}{3} \right) \right)$$

$\boxed{k=0}$

$$z_0 = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{12} \right) = (\sqrt{2})^{1/3} (0'96 - 0'25i)$$

$\boxed{k=1}$

$$z_1 = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{-\pi/4 + k2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi/4 + k2\pi}{3} \right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right)$$

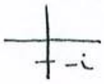
$\boxed{k=2}$

$$z_2 = (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{-\pi/4 + 4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi/4 + 4\pi}{3} \right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{15\pi}{12} \right)$$

Resuelve la ecuación: $x^5 + i = 0$

$x = \sqrt[5]{-i}$



$|z| = 1$

$$z = \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi/2 + 2k\pi}{5} \right)$$

$\boxed{k=0}$

$$z_0 = \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2}{5} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi/2}{5} \right) = \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{-\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{10} \right)$$

$\boxed{k=1}$

$$z_1 = \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi/2 + 2\pi}{5} \right) =$$

$$= \cos \frac{3\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10}$$

$\boxed{K=2}$

$$z_2 = \left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{10}\right)$$

$\boxed{K=3}$

$$z_3 = \left(\cos \frac{11\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{10}\right)$$

$\boxed{K=4}$

$$z_4 = \left(\cos \frac{15\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{15\pi}{10}\right)$$

· Exponencial de un nº complejo.

$$\boxed{e^x = A \rightarrow \ln A = x}$$

$e = 2'67$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Operaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x \cdot e^y = e^{x+y} \\ \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \\ (e^x)' = e^x \end{array}}$$

$$e^z = e^{x+iy} = \overset{n^\circ \mathbb{R}}{e^x} \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$\boxed{e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

Ejemplo:

$$e^{(1+\sqrt{3}i)} = e^1 (\cos \sqrt{3} + i \operatorname{sen} \sqrt{3})$$ Siempre está en RAD.

Observación: Si $x=0$

$$e^z = e^{0+iy} = 1 (\cos i + i \operatorname{sen} i)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

$$\boxed{|r| e^{i\theta} = |r| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}$$ Notación de Euler.

Con notación de Euler calcular:

$$(1-i)^{23} = \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{23} = (\sqrt{e})^{23}\, e^{-i\,\frac{23\pi}{4}} =$$

$$(\sqrt{e})^{23}\left(\cos\frac{-23\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-23\pi}{4}\right)$$

Halla z para que:

$$e^{2z} = -1 \longrightarrow (-1+0i) = 1\,(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = 1\cdot e^{i\pi}$$

$$e^{2z} = 1\cdot e^{i\pi} \rightarrow 2z = i\pi \rightarrow z = \frac{i\pi}{2}$$

Málaga 14-10-10

$$z = x + iy$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\operatorname{sen} y)$$

Notación de Euler: para z de módulo $|z|$ y argumento θ es $|z|\,e^{i\theta}$ $\quad |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$$\begin{aligned} & e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \\ + \; & e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \\ \hline & e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

$$\begin{aligned} & e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \\ - \; & e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \\ \hline & e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

calcular valores de z: $\operatorname{sen} z = 2$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2 \; ; \quad e^{iz}-e^{-iz} = 4i$$

$$e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 4i \qquad \text{Hacemos CV} \rightarrow e^{iz} = t$$

$$t - \frac{1}{t} = 4i \rightarrow t^2 - 1 = 4it$$

$$t = \frac{4i \pm \sqrt{16i^2+4}}{2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$t = (2 \pm \sqrt{3})i$$

Deshacemos el CV:

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$$

$z = x+iy$

$$e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}\cdot e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) =$$

$$= 0 + (2 \pm \sqrt{3})i$$

$$e^{-y}\cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$e^{-y}\cancel{i}\operatorname{sen} x = (2 \pm \sqrt{3})\cancel{i}$$

1

$$e^{-y} = (2 \pm \sqrt{3})$$

1

$$-y \ln e = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$y = -\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$\boxed{z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\left(-\ln(2 \pm \sqrt{3})\right)}$$ //

T2.5 (1)

$\cos z = 2$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$4 = e^{iz} + e^{-iz} \longrightarrow \quad CV \to e^{iz} = t$$

$$4 = t + \frac{1}{t}$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\boxed{t = 2 \pm \sqrt{3}}$$

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y} \cdot e^{ix} = e^{-y}(\cos x \quad + i \operatorname{sen} x)$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} + 0i$$

entonces:

$$e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{-y} \cancel{i} \operatorname{sen} x = 0 \cancel{i} \quad \longrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \to \boxed{x = 0 + k\pi}$$

$$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$-y \ln e = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \qquad \ln e \to 1$$

$$y = -\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$\boxed{z = k\pi + i(-\ln(2 \pm \sqrt{3}))}$$

Logaritmos de complejos.

$e^x \qquad \ln x$

$\boxed{e^{\ln x} = x}$; $\ln(\underbrace{e^{\ln x}}_{x}) = \ln x$

$\ln x \underbrace{\ln e}_{1} = \ln x$

$\boxed{\ln e^x = x \ln e = x}$

$\ln z = \ln(|z| \cdot e^{i\theta}) = \ln|z| + \ln(e^{i\theta})$

$= \ln|z| + i\theta \ln e = \ln|z| + i\theta$

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\theta + 2k\pi}$$

$z_1^{z_2} = (e^{\ln z_1})^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$

$$\boxed{z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}}$$

Problemas:

$\ln(-1)$

$z = -1 + 0i$

$|z| = 1$

$\theta = \pi + 2k\pi$

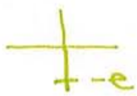
Aplicamos la fórmula:

$(\ln(-1)) = \overset{0}{\ln 1} + i(\pi + k2\pi)$

$\ln(-1) = i(\pi + k2\pi)$

$\ln(-ei)$

$z = 0 - ei$



$|z| = e$

$\theta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

$\ln(-ei) = \ln|-ei| + i\,(\text{Argumento} + k2\pi)$

$= \ln e + i\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$

Problema 8

ⓑ $e^{\frac{2+\pi i}{4}} = e^{2/4 + \pi/4 i} = e^{1/2} e^{i\pi/4} =$

$= e^{1/2} e^{i\pi/4} = e^{1/2} (\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)$

Parte real: $e^{1/2} \cos \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2}$

Parte imaginaria: $e^{1/2} \operatorname{sen} \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2}$

Escuela Politécnica Superior de Málaga. CÁLCULO

1. Cálculo en una variable.

1. En los números que se describen a continuación, ¿Cuáles son racionales y cuales no? Encontrar la fracción generatriz para aquellos que sean racionales:

   (a) $1 - \sqrt{2}$

   (b) $3,010203010203010203010203\ldots$

   (c) $0,0123456789101112131415 16\ldots$

   (d) $1,\overline{9}$

   (e) $21,102003000400005000006000000\ldots$

   (f) $9,000\overline{009}$

2. Representa en la recta los conjuntos que se expresan mediante el valor absoluto:

   (a) $A = \{x \in R : |x + 5| < 2\}$

   (b) $B = \{x \in R : |x - 9| \geq 7\}$

   (c) $C = \{x \in R : 1 < |x - 9| \leq 7\}$

   (d) $D = \{x \in R : |4x + 9| > 18\}$

   (e) $E = \{x \in R : |4x - 9| \geq 18x\}$

3. ¿Qué valores de x cumplen que $|x^2 - 1| < 0.1$?

4. Si $x \in [0.9, 1.1]$, ¿Podemos afirmar que $|x^2 - 1| < 0.3$?

5. Si $x \in [0.8, 1.2]$, ¿Cuál es el menor valor de ϵ que hace cierta la desigualdad $|x^2 - 1| < \epsilon$?

6. En cada caso, halla las partes reales e imaginarias y el módulo. Exprésalos en forma trigonométrica y polar.

   (a) $(\frac{1}{2-3i})(\frac{1}{1+i})$.

   (b) $(1 + i)^3$

   (c) las raíces sextas de $(1 - i)$

   (d) $(1 - \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$

7. Halla las soluciones de $z^4 + 4 = 0$

8. Calcula las partes real e imaginaria de las exponenciales

   (a) $e^{(2+3\pi i)}$

   (b) $e^{\frac{2+\pi i}{4}}$

9. Halla los valores de z para los que

   (a) $e^z = -2$

   (b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$

10. Resuelve la ecuación $\cos z = 2$

11. Calcula los logaritmos

    (a) $\log 1$
    (b) $\log(-1)$
    (c) $\log(-ei)$

12. Dibuja las gráficas de las funciones:

    (a) $f(x) = x^2 - 1$
    (b) $f(x) = -x(x+3)(x+4)$
    (c) $f(x) = e^{5x}$
    (d) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$
    (e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{5}$
    (f) $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$

13. Expresa distintas ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $x = y(t)$ de las curvas que vienen definidas implicitamente por:

    (a) $3x - 4y = 5$
    (b) $x^2 + y^2 = 4$
    (c) $x^2 + 9y^2 - 1 = 0$

14. Esboza la gráfica de las curvas para los valores de t indicados cuyas ecuaciones parmétricas vienen dadas por:

    (a) $x = t - 2, \quad y = 2t + 3, \quad 0 \leq t \leq 5$
    (b) $x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3; \quad -2 \leq t \leq 2$
    (c) $x = -2 + \cos t, \quad y = 3 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$
    (d) $x = \dfrac{1}{\cos t}, \quad y = \tan t, \in [-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}]$
    (e) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$

15. Para cada curva parametrizada, encuentra una expresión $F(x, y)$ implícita de la trayectoria que describe:

    (a) $x = t - 2, \quad y = 2t + 3, \quad 0 \leq t \leq 5$
    (b) $x = 4t^2 - 5, \quad y = 2t + 3, \quad -2 \leq t \leq 2$
    (c) $x = -2 + \cos t, \quad y = 3 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$
    (d) $x = cost$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

16. Da las ecuaciones paramétricas de la curva *Cicloide* que es la que describe un punto situado sobre una circunferencia al rodar sobre el eje OX desde el origen. (Utiliza el parámetro $t =$ángulo que ha girado la circunferencia. Inicialmente $t = 0$.)

17. Expresa en coordenadas polares los puntos que en cartesianas son: $(4,4)$, $(-2,2\sqrt{2})$.

18. Expresa en cartesianas los puntos que en polares son $(3,\frac{5\pi}{6})$, $(5,\frac{\pi}{2})$.

19. Expresa en polares las curvas que en cartesianas vienen dadas como:

(a) $y=3$ (b) $x=-1$ (c) $y=6x$ (d) $x^2=8y$ (e) $x^2-y^2=16$

20. Haz un esbozo de la curva que tiene la ecuación polar:

(a) $\theta=\frac{\pi}{4}$

(b) $r=4\operatorname{sen}\theta$ (Circunferencia)

(c) $r=2+2\cos\theta$ (Cardiode)

(d) $r=\cos 3\theta$ (Rosa de tres pétalos)

(e) $r=a\operatorname{sen}2\theta$ (Rosa de cuatro pétalos)

(f) $r\theta=1$ (Espiral)

(g) $4r=\theta$ (Espiral)

21. Expresa en cartesianas las siguientes curvas expresadas en polares. Dibujarlas.

(a) $r\cos\theta=5$

(b) $\theta=\frac{\pi}{6}$

(c) $r^2\cos 2\theta=1$

(d) $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

22. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+2x}{x+x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^3\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+x^2+3}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ h) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^5+7x^3+2$

23. Analiza la continuidad de las funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{|\,x\,|}{x}$

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3}$

(c) Función *parte entera* denotada por $[[x]]$ que se define como

$$[[x]] = \text{ el mayor número entero } n \text{ tal que } n\leq x$$

(d) $f(x)=[[\operatorname{sen}x]]$ definida en $[0,2\pi]$

(e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

(f) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

24. Encuentra la derivada de las funciones:

a) $y=\mathrm{e}^{3x}$ b) $y=2^{3x+1}$ c) $y=\sqrt{x^2\mathrm{e}^{-x}}$

d) $y=(4x^3+7x^2)^{10}$ e) $y=\operatorname{sen}2x\cdot\cos 3x$ f) $y=\ln\dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{t^3}$

g) $y=\dfrac{2x^5+3x^4-x^3}{x^2}$ h) $y=(x^3+x^2)^3$ i) $y=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$

j) $y=\dfrac{3x-4}{(5x+2)^3}$ k) $y=\left[\dfrac{1}{(x^3-x+1)^2}\right]^4$ l) $y=\sqrt{4x^2+9}$

m) $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}$ n) $y=(x+\operatorname{sen}^5 x)^6$ o) $y=x^2\arccos\frac{2}{x}$

p) $y=3^{-x^2}$ q) $y=\operatorname{arcsen}e^x$ r) $y=\tan^2(e^{3x})$

s) $y=\ln(\cos x)$ t) $y=\ln^2(1+x)$ u) $y=\ln(\sec x+\tan x)$

25. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x\le 2 \\ x^2-2x & x>2 \end{cases}$ b) $g(t)=t\cdot|t-2|$

26. Determina los coeficientes a y b para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 1 \\ ax+b & x<1 \end{cases}$$

27. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y=\sqrt{x}$ en el punto $x=1$. Comprueba gráficamente el resultado.

28. Determina el punto de la gráfica de $f(x)=x^2-x$ en el que la recta tangente sea $3x-9y-4=0$.

29. Encuentra los puntos de la gráfica de la función $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x$ donde la tangente sea horizontal. ¿En qué punto la tangente es paralela a la recta $x+y=5$?

30. Halla la derivada tercera de la función $f(x)=x\cdot\cos x$.

31. Halla una fórmula para la derivada n-ésima de la función $f(x)=\ln x$.

32. Halla las derivadas de las funciones que vienen definidas implícitamente por la curva $x^2+y^2=4$.

33. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ en los puntos en los que $x=3$.

34. Halla las derivadas de las siguientes funciones, utilizando logaritmos:

a) $y=x^{\operatorname{tg}x}$ b) $y=\dfrac{x^3\operatorname{sen}^2 x}{(x+1)(x-2)^2}$

35. Aproxima linealmente los valores de: $\operatorname{arctg}(1.1); 0.999^{10}$ y $\operatorname{sen} 62°$.

36. Dados $5x^3+2x^2-x+1, (x-1)^3+7(x-1)+4$ y $(x-2)^2+3(x-2)^3+24$, exprésalos como polinomios centrados en $x_0=5$.

37. Para cada una de las funciones siguientes, halla el polinomio n-ésimo de Taylor en $x_0=0$:

a) $f(x)=e^x$ b) $f(x)=5x^5-4x^2+2x-1$ c) $f(x)=(x-1)^3+(x-1)^2-4(x-1)+7$

d) $f(x)=\operatorname{sen} x$ e) $f(x)=\cos x$ f) $f(x)=\ln(1+x)$

g) $f(x)=\arctan x$ h) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ i) $f(x)=\sqrt{1+x}$

38. Utiliza los resultados del ejercicio anterior y aplica convenientemente el principio de sustitución para hallar el polinomio de orden 3 en $x_0=0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$ c) $f(x)=\ln(1+\operatorname{sen} x)$

39. Calcula el polinomio de Taylor centrado en el 0 de orden 4 de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$ b) $f(x)=\operatorname{sen} x\cos x$ c) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ e) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{e^x}}$ f) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$

De todas estas funciones indica cuáles son infinitésimos en $x_0=0$.

40. Da un infinitésimo equivalente para las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(1+\operatorname{sen} x)$ en $x_0=0$ b) $f(x)=e^x-1-x$ en $x_0=0$

c) $f(x)=e^x-1-\dfrac{1}{2}x$ en $x_0=0$ d) $f(x)=-1+\sqrt{x}$ en $x_0=1$

e) $f(x)=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ en $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ f) $f(x)=a^{x+1}-1$ en $x_0=-1$

41. Utiliza infinitésimos equivalentes para calcular los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2(a^{x^2}-1)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}-\frac{a}{b}\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^4-\ln(1+x^2)}{x(e^{x^3}-1)}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{-1+(x-1)+2(x-1)^2+3^{x-1}}{3(x-1)}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{-1+\ln x}$

42. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{1/x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x^3-3)(1+\cos x)\operatorname{sen} x}{(x^2-x)\cos x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

43. Utiliza el polinomio de Taylor de grado 2 para calcular el valor aproximado de $e^{0.2}$. Estima el error cometido.

44. Aproxima el valor de $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 0.01.

45. Aproximar con cuatro cifras decimales los valores de: $e^{-0.2}$, $\ln 0.8$ y $\cos 36^{O}$.

46. Halla los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ en $[0, 3]$ b) $f(x) = 3 - |x - 2|$ en $[1, 4]$

47. Un granjero tiene 200m. de tela metálica que va a utilizar para construir tres lados de un corral rectangular haciendo uso, como cuarto lado del corral, de un muro recto que ya existe. ¿ Qué dimensiones maximizarán el área del corral ?

48. Una lámina metálica rectangular mide 5 m. de ancho y 8 m. de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. ¿ Como debe hacerse para obtener una caja del máximo volumen posible ?

49. Halla los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que están más próximos y más alejados del punto $(0, 2)$.

50. Calcula las áreas de $\int_0^1 x$, $\int_0^1 x^2$ y $\int_0^1 x^3$ como límites de sumas de Riemman.

(Observación: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$)

51. Teniendo en cuenta esa definición de integral calcula los límites:

(a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n})$

(b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}})$

(c) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2})$

(d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2})$

(e) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2})$

52. Sabiendo que f es una función integrable en $[0, 5]$ y que $\int_0^1 f = 6$, $\int_0^2 f = 4$ y $\int_2^5 f = 1$, halla entonces $\int_1^5 f$.

53. Para f función integrable en un entorno del 0, calcula el límite $\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h f}{h}$

54. Calcula las derivadas de las funciones que se indican.

(a) $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t} dt$

(b) $g(x) = \int_{-x}^{a} f(t)dt$

(c) $t(x) = \int_{cos^3 x}^{\sqrt{2x}} (t - \ln(t-1))dt$

55. Para la función f definida en $[0,3]$

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le t<1 \\ t & \text{si } 1\le t<2 \\ -5t+2 & \text{si } 2\le t\le 3 \end{cases}$$

halla, la *función F área acumulada* en $[0,3]$, $F(x)=\int_0^x f$ y calcula $F(3)$, $F'(1)$, $F'(2)$ y $F''(1)$.

56. Halla el valor del real K que satisface la igualdad $\int_1^3 f(x)dx = 2K$, donde $f(t)=\begin{cases} -1 & \text{si } 1\le x<2 \\ 2 & \text{si } 2\le x\le 3 \end{cases}$

57. Pon un ejemplo de una función que admita sólo hasta la segunda derivada en $x_0=1$.

58. Sabiendo que $f(0)=1$ y que $f'(x)=x^3+1$, calcula $f(2)$.

59. Calcula:

a) $\int k\mathrm{e}^{-x}\,dx$ b) $\int 6\cos(3x+1)\,dx$ c) $\int (x^3+2x^2+1)\,dx$

d) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ e) $\int x\,\mathrm{sen}\,x dx\,dx$ f) $\int \dfrac{\cos 3x}{(1+\mathrm{sen}\,3x)^5}\,dx$

g) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ h) $\int \mathrm{e}^x\cos x\,dx$ i) $\int \dfrac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$

j) $\int \dfrac{1}{ax+b}\,dx$ k) $\int \dfrac{1}{(ax+b)^n}\,dx$ l) $\int \dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)}\,dx$

m) $\int \dfrac{x-2}{x^2-5x+7}\,dx$ n) $\int \dfrac{x^6-2}{x^4+x^2}\,dx$ o) $\int \dfrac{2x^2+2x-2}{x^3+2x}\,dx$

p) $\int x(x^2+3)^4\,dx$ q) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}\,\mathrm{e}^x\,dx$ r) $\int \ln(\cos x)\,\mathrm{tg}\,x\,dx$

s) $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$ t) $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$ u) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$

60. Utiliza la regla de Barrow para calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ b) $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \mathrm{e}^{-x}dx$ c) $\int_1^3 \dfrac{x+2}{x}dx$

61. Calcula las integrales impropias que se indican,

(a) $\int_0^\infty \dfrac{1}{2^x}dx$

(b) $\int_0^2 \dfrac{1}{(x-1)^2}dx$

(c) $\int_1^\infty \dfrac{1}{x-1}dx$

(d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx$

62. Calcula las integrales impropias que se indican,

(a) $\int_0^\infty \dfrac{1}{2^x}dx$

(b) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{x-1}dx$

(d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx$

63. Calcula las áreas que se indican:

    (a) La comprendida entre las gráficas de las funciones $x(x-1)(x-3)$ y $-x(x-2)(x-4)$.

    (b) La comprendida entre las gráficas de las curvas $2y^2 - x - 4 = 0$ y $y^2 - x = 0$

64. Halla el valor de c tal que la región limitada por $y = 2x$, $y = 0$ y $x = 4$ esté dividida en dos regiones de áreas iguales por la recta $y = c$.

65. Sea la región del primer cuadrante acotada por las curvas de ecuación $y = x^2$, $x = 0$ e $y = 1$. Halla el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región plana anterior alrededor de:

    i) el eje OX ii) el eje OY

    iii) la recta $y = 3$ iv) la recta $x = -1$

    utilizando el método de los discos o el de las capas.

66. Sea un sólido de base plana y altura h. Supóngase que el área de una sección paralela a x unidades de la base es $c(h-x)^2$ para $x \in [0, h]$ y alguna constante c independiente de x. Prueba que el volumen del sólido es $bh/3$ donde b es el área de la base.

67. Se corta una cuña de un tronco (cilíndrico) de radio 2 dm dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco. Si uno de los cortes se hace perpendicular y el otro formando un ángulo de 30° con el primero, ¿qué volumen tendrá la cuña?

68. Calcula el volumen de la esfera de radio R mediante el procedimiento de hacer girar una función alrededor del eje OX.

69. Se taladra una esfera de radio R por uno de sus diámetros con una broca de radio r. Halla el columen de la esfera taladrada.

70. Calcula el volumende un toro de radios mayor y menor respectivamente R y r, a) Mediante el método de capas b) Mediante el método de discos.

71. Calcula el volumen que se genera la región acotada por $y = x^2 + 2$, $y = \frac{1}{2}x + 1$, $x = 0$, $x = 1$ al hacerla girar sobre

    (a) El eje $0X$

    (b) La recta $y = 3$

72. Utiliza el cálculo del volumen mediante secciones para determinar,

    (a) El volumen de una esfera de radio a

    (b) El volumen de un elipsoide de semiejes a, a y b.

    (c) El volumen de una pirámide recta de altura h y base cuadrada de lado a

    (d) El volumen de un sólido cuya base es un circulo en el plano XY de radio a, y la sección del sólido al intersecarlo con un plano perpendicular al eje $0X$ es un triángulo equilátero.

73. Se desea contruir un contenedor de papel en forma de pirámide truncada, con las bases superior e inferior, que son cuadrados de lados 60 y 100, y co volumen 1 metro cúbico. ¿Cuál será la altura?