TEMA 2: FUNCIONES

Málaga 14-10-10

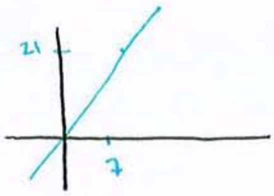
$x \longmapsto f(x)$ Generalmente una expresión con fórmula.

Ejplo:

$f(x) = 3$

$x \longmapsto 3x$

$7 \longmapsto 21$

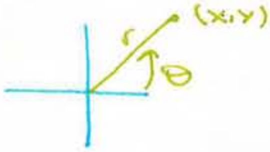


→ ejes cartesianos

Función expresada en polares:

En lugar de x, y ejes cartesianos:

Ahora:



tendremos θ, r

θ = ángulo

r = radio

$$\boxed{\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ tg\,\theta = \frac{y}{x} \end{array}}$$

$tg\theta = \frac{Y}{X}$ $r^2 = x^2 + y^2$

$X = r\cos\theta$

$Y = r\,sen\,\theta$

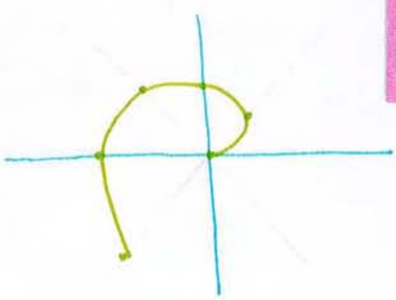
Taylor:

$T_{x_0,n}(f(x)) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)$

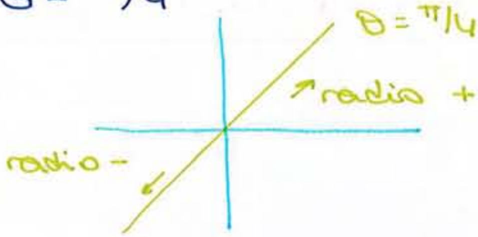
Ejplo: $r = \theta$ $\theta \geq 0$

Dando valores:

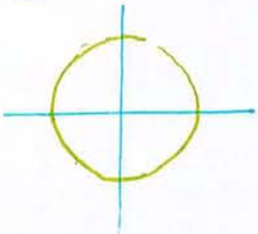
r	0	π/4	π/2	π
θ	0	π/4	π/2	π



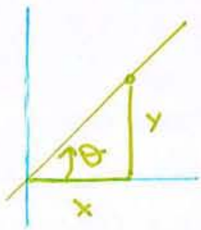
$\theta = \pi/4$



$r = 2$



Formulas a saber:



$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

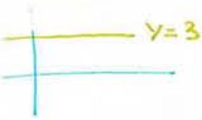
$$\boxed{x = r\cos\theta}$$

$$\boxed{y = r\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Problema 19.

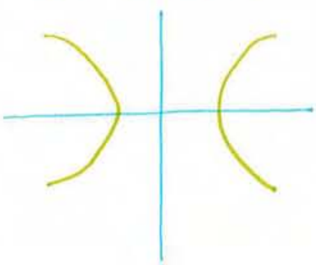
$y = 3$



$$r\operatorname{sen}\theta = 3$$

$$r = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta}$$

$x^2 - y^2 = 16$



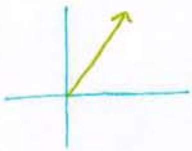
$$(r\cos\theta)^2 - (r\operatorname{sen}\theta)^2 = 16$$

$$r^2\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 16$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{16}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}}$$

Problema 17.

a) Pasar a polares. $(4,4)$.



$r=\sqrt{4^2+4^2}$

$r=4\sqrt{2}$

$tg\ \frac{4}{4}=tg\ 1 \rightarrow \theta=45^\circ=\pi/4$

Entonces : $(4\sqrt{2}, \pi/4)$

Problema 21.

a) $r\cos\theta=5$

$x=5$

$\theta=\frac{\pi}{6}$

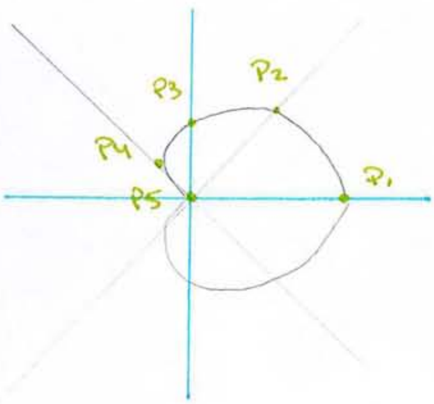
$tg\ \theta=tg\ \frac{\pi}{6}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{y}{x}$

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

Problema 20.

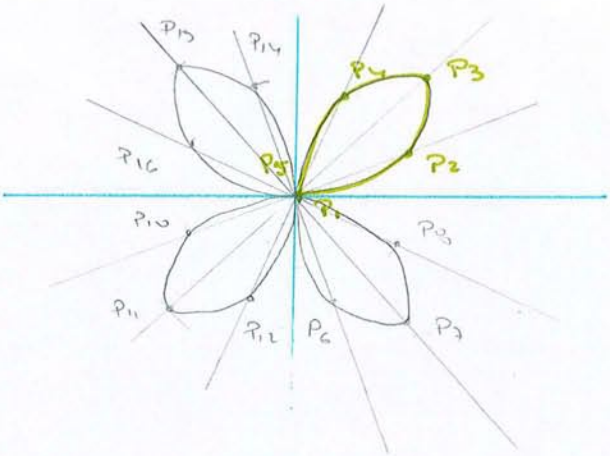
c) $r=2+2\cos\theta$ (cardioide)

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/2+\pi/4$	π
r	4	$2+\sqrt{2}$	2	$2-\sqrt{2}$	0



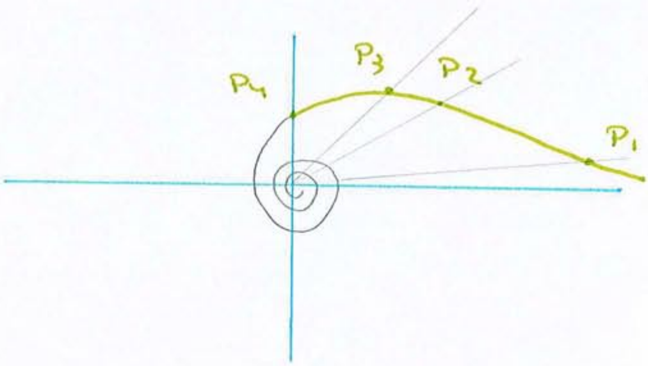
e) $r = \operatorname{sen} 2\theta$

θ	0	30	45	60	90
r	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



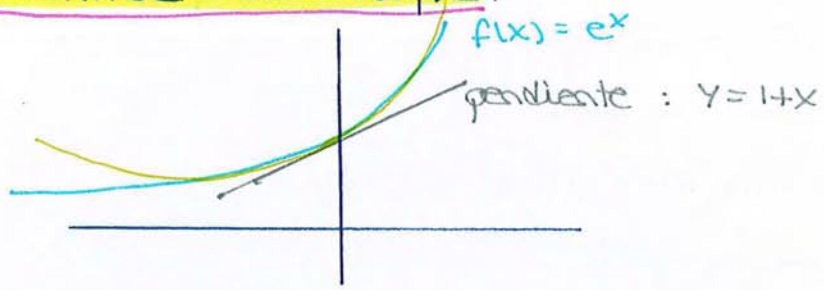
f) $r\theta = 1 \quad \rightarrow r = \frac{1}{\theta}$

θ	0	15° $\pi/12$	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	90° $\pi/2$
r	$\rightarrow \infty$	$12/\pi$	$6/\pi$	$4/\pi$	$2/\pi$



 Málaga 18-10-10

La Fórmula de Taylor



① Aproximación por polinomio de grado 1.

$y = a+bx$

Pasa por el pto $(\overset{x_0,\,y_0}{0,1})$ y tiene pendiente $(e^x)'(\underset{\uparrow}{0}) = 1$ derivada, se refiere al pto

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = m(x-0) \longrightarrow y = x+1$

Se obtiene $y = 1+x$, así diríamos que:

$e^{0'1} \simeq 1 + 0'1 = 1'1$

② Aproximación con polinomio de grado 2.

$y = a+bx+cx^2$

Paréntesis: x^2 $\cup$ $-x^2$ $\cap$

Al polinomio  le pediremos que:

pase por $(0,1)$ $1 = a + b0 + c0^2 \rightarrow \boxed{a=1}$

$y' = b+2cx$; tiene que cumplirse que $y = y'$

$1 = b + 2cx \rightarrow \boxed{b=1}$

$y'' = 2c \rightarrow \boxed{c = 1/2}$

conclusión : $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Entonces diríamos que:

$e^{0'1} \simeq 1 + 0'1 + \frac{1}{2}(0'1)^2 = 1'105$

Inciso:

Los polinomios que conocemos son polinomios centrados en cero.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

pero por ejemplo:

$1 + 2x - x^2$ lo podemos centrar en otro nº.

Si lo centramos en 2:

$$1 + 2x - x^2 = a_0 + a_1 (x-2) + a_2 (x-2)^2 =$$
$$= 1 + 2((x-2)+2) - ((x-2)+2)^2 =$$
$$= 1 + 2(x-2) + 4 - (x-2)^2 - 4 - 4(x-2) =$$
$$= 1 - 2(x-2) - (x-2)^2$$

$$\boxed{1 + 2x - x^2 = 1 - 2(x-2) - (x-2)^2}$$

→ Búsqueda del polinomio aproximador de grado n:

Dada la función $f(x)$, dado un pto x_0; se busca un polinomio centrado en x_0 que:

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n}$$

que cumple:

$$f(x) = p(x_0)$$
$$f'(x) = p'(x_0)$$
$$f''(x) = p''(x_0)$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = p^{(n)}(x_0)$$

$$f(x_0) = a_0 \rightarrow \boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$f'(x_0) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + n a_n (x - x_0)^{n-1} \longrightarrow \boxed{a_1 = f'(x_0)}$$

$$f''(x_0) = 2a_2 + 6a_3 (x - x_0) + \ldots + n a_n (x - x_0)^{n-2} \rightarrow \boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}}$$

conclusión: $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Esto es el polinomio de Taylor para valores cercanos a x_0 que tiene valor $n \equiv T_{x_0,n}(f(x))$

$$\boxed{T_{x_0,n}(f(x)) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Problema (Ejplo):

1) $f(x) = e^x$

$x_0 = 0$ $\qquad T_{0,n}(e^x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

grado n

2) $f(x) = \ln(1+x)$

$x_0 = 0$

grado n

$f(0) = \ln(1+0) = 0$

$f'(0) = (\ln(1+0))'(0) = \frac{1}{1+x}(0) = 1$

$f''(0) = (1+x)^{-1}(0) = -1\,(1+x)^{-2} = -1$

$f'''(0) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = 2$

$f^{iv}(0) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} = -3!$

$$\boxed{f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!}$$

$$T_{0,n}(\ln(x+1)) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 \dots$$

conclusión:

$$\boxed{T_{0,n}(\ln(x+1)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}}$$

$$T_{0,n}(e^x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

por lo que:

$n=1$ porq sino $\frac{x^n}{n}=\frac{1}{0}$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Málaga 21-10-10

Fórmulas a saber:

$$\boxed{T_{x_0,n}(f(x))=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

Si $x_0=0$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\boxed{T_{0,n}(e^x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\longrightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n}$$

$$T_{0,n}(L(1+x))=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}}$$

$f(x)=\operatorname{sen}x$

$x_0=0$

$$\boxed{\begin{aligned}f(0)&=\operatorname{sen}x=0\\ f'(0)&=\cos x=1\\ f''(0)&=-\operatorname{sen}x=0\\ f'''(0)&=-\cos x=-1\end{aligned}}$$

$$f^{IV}(0)=\operatorname{sen}x=0$$

$(\dots)$

$$T_{0,2n+1}(\operatorname{sen}x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \cos x$

$x_0 = 0$

$f(0) = \cos x = 1$

$f'(0) = -\operatorname{sen} x = 0$

$f''(0) = -\cos x = -1$

$f'''(0) = \operatorname{sen} x = 0$

$$T_{0,n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$T_{0,n}(\cos x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Teorema de Taylor:

Si se estima la suma hasta el término n-ésimo.

El error (resto de Taylor):

$$|E_n| = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

donde $c : x_0 < c < x$

Ejemplo: Estimar $\operatorname{sen}(0'1)$, grado 5. Dar una cota superior del Error:

$$\operatorname{sen} x \sim \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}_{\text{grado } 5} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\text{Estimar: } 0'1 - \frac{(0'1)^3}{3!} + \frac{(0'1)^5}{5!} = 0'1 - \frac{0'001}{6} + \frac{0'00001}{120}$$

¿Cómo es de buena esta estimación?

$x = 0$
$x_0 = 0'1$

$$|E_5| = \frac{(\operatorname{sen})^{VI}(c)}{6!} (0'1)^6 \leq \frac{1}{6!} (0'1)^6$$

$$= \underline{\underline{0000000138}}$$

$$\operatorname{sen}(0'1) = 0'099834012$$

$$\sqrt[3]{1'1} = (1'1)^{1/3} \longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$x = 1'1$
$x_0 = 1$

$$\sqrt[3]{1+0'1}$$

$x = 0'1$
$x_0 = 0 \longrightarrow \boxed{f(x) = \sqrt[3]{1+x}}$

$$f(0) = (1+x)^{1/3} = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} = 1/3$$

$$f''(0) = \frac{1}{3}(-2/3)(1+x)^{-5/3} = -2/3^2$$

$$f'''(0) = \frac{1}{3}(-2/3)(-5/3)(1+x)^{-8/3} = \frac{2\cdot 5}{3^3}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11 \ldots [(n-2)3+2]}{3^n}$$

$$T_{0,n}(\sqrt{1+x}) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{-2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{2\cdot 5}{3^3 3!}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\ldots (\ldots)x}{3^n n!}$$

$$|E_n| = \left| (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{3^{n+1}\quad (n+1)!} (1+c)^{-\frac{(3n+2)}{3}} \right| =$$

$$(n-1)3+2 = 3n-3+2 = 3n-1$$

$$= \frac{2\cdot 5 \ldots (3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!\sqrt[3]{(1+c)^{3n+2}}} \leq \boxed{\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{3^{n+1}\quad (n+1)!}}$$

Si estimo con polinomio de grado 3:

$$E_3 = \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}$$

Málaga 25-10-10

Estimar en radianes cos 1, grado 6.

$$f(x) = \cos x$$

$$x_0 = 0$$

$$x = 1$$

$$T_{0,6}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}$$

$$= 0'54027\overset{\frown}{7}$$

$$|E_6| = \left| \frac{(\cos x)^{VII}(c)}{7!} x^7 \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} x(c)}{7!} x^7 \right| \leq \frac{1}{7!} = 0'000198$$

con $0 < c < 1$

ln 0'8, grado n.

$f(x) = \ln x$

$x_0 = 1$

$x = 0'8$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} \ln(1+x) \\ x_0 = 0 \\ x = -0'2 \end{array}}$ con $-0'2 < c < 0$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

(....)

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}}$$

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$(-0'2) - \frac{(-0'2)^2}{2} + \frac{(-0'2)^3}{3} - \frac{(-0'2)^4}{4} + \dots (-1)^{n+1}\frac{(-0'2)^n}{n}$$

Tb podría poner n.

$$|E_n| = \left| \frac{(-1)^{n+2}\, n!\, (1+c)^{-(n+1)}}{(n+1)!} \; (-0'2)^{n+1} \right| =$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\underline{(n+1)\cancel{n!}}\; (1+c)^{n+1}\; 5^{(n+1)}} < \frac{1}{(n+1)(0'8)^{n+1}\, 5^{(n+1)}}$$

$(n+1)! = (n+1)n!$ cojo $0'8$ $0'2 = \frac{1}{5}$

$$\boxed{|E_n| = \frac{1}{(n+1)(0'8)^{n+1}\, 5^{(n+1)}}}$$

Teorema.

Dadas $f(x)$, $g(x)$ entonces:

$$T_{x_0,n}(f \pm g) = T_{x_0,n}(f) \pm T_{x_0,n}(g)$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$+$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$T_{x_0,n}(f \cdot g) = T_{x_0,n}(f) \otimes T_{x_0,n}(g)$$

$$T_{0,3}(e^x \cdot \operatorname{sen} x) =$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

$\otimes$

$$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{3!}$$

multiplicaciones cruzadas.

$$(1\cdot 0) + (1\cdot 1 + 1\cdot 0)x + (1\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 0)x^2 + (1\cdot \tfrac{1}{2} + 0\cdot \tfrac{1}{3!} + 1\cdot(\tfrac{-1}{3!}))x^3$$

solución: $x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 = e^x \operatorname{sen} x$.

$T_{0,4}(\cos x \cdot \ln(1+x))$

$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & x & -\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{4}x^4 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}x^2 & 0 & \frac{1}{4!}x^4 \\ \hline \end{array}$$

$(1\cdot 0) + (1\cdot 1)x + (1\cdot \frac{-1}{2})x^2 + (1\cdot \frac{1}{3} + 1\cdot(\frac{-1}{2}))x^3 +$

$+ (-\frac{1}{2}\cdot \frac{-1}{2} + \frac{1}{4!}\cdot 1)x^4$

③ $T_{x_0,n}\left(\frac{f}{g}\right) = T_{x_0,n}(f) \odot T_{x_0,n}(g)$

División larga

$\rightarrow T_{0,2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\ln(1+x)}\right)$

$$\begin{array}{ccc|l} x & 0x^2 & -\frac{x^3}{6} & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ -x & \frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{3} & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3 \\ \hline & \frac{x^2}{2} & -\frac{1}{2}x^3 & \\ & -\frac{x^2}{2} & \frac{1}{4}x^3 & \\ \hline & & -\frac{1}{4}x^3 & \\ & & \frac{1}{4}x^3 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3}$$

$\rightarrow T_{0,n}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ $\quad 1 \sim 1$, $\quad 1-x \sim 1-x$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & & & 1-x \\ -1 & x & & 1 + x + x^2 \dots \\ \hline 0 & x & & \\ & -x & +x^2 & \\ \hline & & x^2 & \\ & & \dots & \end{array}$$

$T_{0,n}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

④ composición ó Principios de sustitución

$$T_{x_0,n}(g(f(x))) = g(T_{x_0,n}(f(x)))$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = e^x$

$x \longrightarrow \operatorname{sen} x \longrightarrow e^{\operatorname{sen} x}$ { Esto es la composición

Ejemplo: $T_{0,3}(e^{\operatorname{sen} x}) =$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$= 1 + \operatorname{sen} x + \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3!} =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} =$$

$$= 1 + 1 \cdot x + \left(\frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{-1}{3!} + \frac{1}{3!}\right)x^3$$

 Málaga 28-10-10

Eplo: De Ppio de sustitución.

$\ln(x+1)$
$x_0 \to 0$

$$\ln(1+x) \to x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

$$\ln(1+x^2) \to x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{2} \dots$$

$$\ln(1+\operatorname{sen}x) \to \operatorname{sen}x - \frac{(\operatorname{sen}x)^2}{2} \dots$$

$\ln(x)$ $\quad \ln x \to$
$x_0 \to 1$

$$\ln(1+(x-1)) \to (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \dots$$

Aplicación Polinomios Taylor al cálculo de límites

$\lim\limits_{x \to x} 3x^2+1 = 76$

$\infty \cdot 0$
$\frac{0}{0}$
1^∞
∞^0

Definición: Infinitésimo.

$f(x)$ lo es en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

x es infinitésimo en 0

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$1-e^x$ es infinitésimo en 0

$\lim\limits_{x \to 0} 1-e^x = 1-1 = 0$

$\left.\begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix}\right\}$ se acerca más al 0, x^2 (eplo $0'1^2 = 0'01$)

Definición $f(x), g(x)$ infinitésimos en x_0 son

a) equivalentes si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

b) $f(x)$ es de orden menor (más rápido) en $g(x)$ cuando:

$T_{x_0,n}(f(x))$ es infinitésimo equivalente al $f(x)$.

Ejplo: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!}}{x} = 1$

Teorema: Si una función puede expresarse de la forma: $f(x) \cdot g(x)$ / $f(x)$ es infinitésimo en x_0 equivalente a $k(x)$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot k(x)}{k(x)} \cdot g(x) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{k(x)} k(x) \cdot g(x) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} k(x) g(x) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} k(x) g(x).$$

Ejplo: $\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim \frac{x}{x} = 1$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim \frac{x}{x} = 1$

$\ln(1+\operatorname{sen} x) \mapsto \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} \ldots$

$\operatorname{sen} x \mapsto x$

Problema 41.b $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(-1+\cos ax))}{\ln(1+(-1+\cos bx))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1+\cos ax}{-1+\cos bx} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(ax)^2}{2}}{-\frac{(bx)^2}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\begin{cases} \cos x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} \\ \cos ax \mapsto 1 - \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4!} \dots \end{cases}$$

Problema 41.d $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = A$

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)$$

$$a^x = 1 + \ln a\, x + (\ln a)^2 \cdot \frac{x^2}{2!}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right) =$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \ln(1+f(x)) \simeq f(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x-2}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x+b^x-2}{2x} =$$

$$a^x+b^x-2 \mapsto (\ln a+\ln b)x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\ln a+\ln b)x}{2x} = \frac{\ln a+\ln b}{2} = \frac{\ln(a\cdot b)}{2} =$$

$$\ln(a\cdot b)^{1/2} = \ln\sqrt{a\cdot b}$$

solución $= \sqrt{a\cdot b}$

41.e $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} - \frac{a}{b}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{b\operatorname{sen} ax - a\operatorname{sen} bx}{b\operatorname{sen} bx}\right) =$$

$$b\operatorname{sen} ax \longmapsto b(ax) - b\left(\frac{(ax)^3}{3!}\right) + \cdots$$

$$-$$

$$a\operatorname{sen} bx \longmapsto a(bx) + a\frac{(bx^3)}{3!} + \cdots$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-b\frac{a^3}{3!} + a\frac{b^3}{3!}\right)x^3}{x^2\left(b(bx - b\left(\frac{bx^3}{3}\right)\right)} = \frac{-b\frac{a^3}{3!} + a\frac{b^3}{3!}}{b^2}$$

Málaga 10 - 1 - 11.

b) $\dfrac{1}{\rho} = 1 - 2\operatorname{sen}\theta.$

c) $\rho = 4\cos\theta + \dfrac{1}{\cos 2\theta}.$

d) $\rho = \dfrac{1-2\cos\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta}.$

8. *Estudiar el comportamiento asintótico de las curvas definidas en forma polar por:*

a) $\rho = \dfrac{\theta-2}{\theta-1}$ *b)* $\rho = \dfrac{\theta^2-4}{\theta^2-1}$

9. *Representar gráficamente con ayuda de ordenador la curva definida en polares por*

$$\rho = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{con } \theta \in [0, 40\pi].$$

¿Es posible encontrar un intervalo $[a, b]$ de modo que la representación con θ en dicho intervalo coincida con la representación con $\theta \in \mathbb{R}$? Justificar este comportamiento.

De: Cálculo I, teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable
agustín de la Villa y otros
librería ICAI.

Capítulo 11

Cálculo de primitivas

Introducción

En este tema nos ocupamos del problema de calcular una primitiva o integral indefinida de una función. Es decir, dada una función f, queremos determinar F tal que para todo x del dominio de f se verifique

$$f(x) = F'(x).$$

Presentamos así la integración como el proceso inverso de la derivación.

La justificación plena de esta materia vendrá dada, en el próximo capítulo, al estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo.

El "cálculo automático de primitivas" es uno de los problemas más tratados en cualquier sistema de cálculo simbólico y está, en general, bastante bien resuelto. Por este motivo, no se dará aquí un tratamiento muy exhaustivo.

De hecho puede el lector comprobar cómo la mayoría de las integrales que aparecen en este texto, u otros análogos, se pueden obtener sin dificultad con DERIVE.

En algunos problemas resueltos no se detallarán hasta el final los cálculos que sean análogos a otros realizados en problemas anteriores.

1. Conceptos preliminares

1.1. Definición. Función primitiva

Decimos que la función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para todo punto x del dominio de f.

OBSERVACIÓN: *Dado que dos funciones que se diferencian en una constante tienen la misma derivada, si F es una primitiva de f, también lo es $F + k$, para todo $k \in \mathbb{R}$.*

1.2. Definición. Función integral indefinida

Dada la función f, se llama función integral indefinida de f al conjunto de todas sus funciones primitivas. Se suele escribir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

con C constante arbitraria, siendo F una primitiva cualquiera de f.

1.3. Integrales inmediatas

Contemplando la derivación como un proceso inverso de la integración se puede obtener la siguiente tabla de integrales inmediatas

1. $\int \alpha \, dx = \alpha x + C \quad \forall \alpha \in R$
2. $\int x^p \, dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$
5. $\int p^x \, dx = \dfrac{p^x}{\log p} + C, \quad p > 0, \; p \neq 1$
6. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
8. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$
9. $\int \sec^2 x \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) \, dx = \int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$
11. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$

OBSERVACIÓN: *Esta tabla puede ser más o menos exhaustiva.*

Una integral es inmediata si la "reconocemos" como derivada de alguna función, por tanto el concepto de integral "inmediata" es relativo.

1.4. Proposición. Linealidad de la integral

Dadas dos funciones f, g, que admiten primitiva y una constante $k \in I\!R$ se verifica

i) $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx.$

ii) $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx.$

2. Técnicas generales de integración

En esta sección se dan tres resultados que permiten transformar integrales complicadas en otras más sencillas. El primero es una consecuencia de la regla de la cadena en derivación y se conoce con el nombre de "cambio de variable". El segundo es el método de "integración por partes", que es consecuencia de la fórmula de derivación de un producto de funciones. El tercero expone el método de reducción para al cálculo de primitivas.

2.1. Cambio de variable

a) Sea Φ una función con derivada Φ' continua, y sea f una función continua. Entonces, haciendo $t = \Phi(x)$, se tiene

$$\int f(\Phi(x))\Phi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt.$$

b) Sea Φ una función con derivada Φ' continua y tal que $\Phi'(x) \neq 0$ para todo x, y sea f una función continua. Entonces, haciendo $\Phi(x) = t$, se obtiene

$$\int f(\Phi(x)) \, dx = \int f(t)(\Phi^{-1})'(t) \, dt.$$

2.2. Integración por partes

Dadas dos funciones derivables f y g se verifica

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx.$$

OBSERVACIONES:

1) *Tomando la notación diferencial, du diferencial de la función u, es decir,* $du = u'(x) \, dx$, *la fórmula de integración por partes se puede escribir*

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

2) *El objetivo de la técnica de integración por partes es el de reducir la integral inicial a otra más sencilla; por ello, intentaremos tomar como* u *una función con derivada lo más simple posible y de modo que sepamos obtener una primitiva para* dv. *(Véanse ejemplos en los problemas resueltos.)*

2.3. Fórmulas de reducción

Sea I_n una integral indefinida que depende de un número natural n. Si podemos definir una relación recurrente del tipo $f(I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{n+p}, n, x) = 0$, denominada "fórmula de reducción", será posible determinar el valor de I_n para cualquier n a partir de $I_0, \ldots, I_p$.

OBSERVACIÓN: *En la mayoría de los casos prácticos la relación recurrente es del tipo*

$$I_n = f(I_{n-1}, x, n),$$

con lo que nos basta conocer una integral para obtener las siguientes.

Para obtener la fórmula de recurrencia se suele utilizar integración por partes (véase problema resuelto 4).

3. Integrales de funciones racionales

Tal y como vimos en el Capítulo 3 en el epígrafe de funciones racionales, toda función racional se puede escribir como suma de un polinomio más una combinación lineal de funciones del tipo

$$\frac{A}{(x-a)}, \quad \frac{A}{(x-a)^n} \; (n > 1), \quad \frac{Ax+B}{(x-r)^2+s^2} \quad \text{y} \quad \frac{Ax+B}{((x-r)^2+s^2)^n} \; (n > 1).$$

Usando la linealidad de la integral, bastará conocer cómo calcular una primitiva de estas fracciones simples para calcular la integral de cualquier función racional.

i) Para $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, se hace $x = a \operatorname{sen} t$ ó $x = a \cos t$.

ii) Para $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$, se hace $x = a \operatorname{tg} t$ ó $x = a \operatorname{senh} t$.

iii) Para $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$, se hace $x = a \sec t$ ó $x = a \cosh t$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Calcular*

a) $\int \sqrt[m]{x^n}\, dx$ *b)* $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

SOLUCIÓN:

a) El integrando es del tipo x^p, por lo que

- si $\frac{n}{m} = -1$, $\int \sqrt[m]{x^n}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$.
- si $\frac{n}{m} \neq -1$, $\int \sqrt[m]{x^n}\, dx = \int x^{n/m}\, dx = \dfrac{x^{(n/m)+1}}{\frac{n}{m}+1} + C$.

b) Para obtener la integral, basta sumar y restar 1, para poderla descomponer en suma de dos integrales inmediatas, obteniendo:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1)\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

2. *Obtener por sustitución el valor de las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\int e^{4x}\, dx$ *b)* $\int \frac{x^3}{2 + x^8}\, dx$

c) $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ *d)* $\int \frac{dx}{x \log x}$

SOLUCIÓN:

a) Para convertir la integral en inmediata hacemos el cambio $4x = t$. Entonces

$$\int e^{4x}\, dx = \int e^t \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4} e^t + C = \frac{1}{4} e^{4x} + C.$$

b) Observemos que en el numerador se tiene x^3 que, salvo en una constante, es la derivada de x^4; por ello, hacemos el cambio de variable $x^4 = t$, con lo que $x^3\, dx = \frac{1}{4}\, dt$. Entonces

$$I = \int \frac{x^3}{2 + x^8}\, dx = \int \frac{\frac{1}{4}\, dt}{2 + t^2}.$$

Ahora intentamos convertir el integrando en la derivada de una función de tipo arcotangente; para ello dividimos por 2 el numerador y el denominador obteniendo

$$I = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{1 + \frac{t^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\, dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$$

c) Dado que la derivada de $\operatorname{arcsen} x$ es $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, se tiene, haciendo el cambio $\operatorname{arcsen} x = u$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{\operatorname{arcsen} x} + C.$$

d) Al ser $\frac{1}{x}$ la derivada de $\log x$, haciendo el cambio $\log x = t$ se tiene

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\log x| + C.$$

3. *Integrar por partes*

a) $\int x^5 \log x\, dx$ *b)* $\int e^x \cos x\, dx$

3.1. Primitivas de las fracciones simples

Las fracciones correspondientes a raíces reales pueden ser de uno de los dos tipos siguientes: $\dfrac{A}{(x-a)}$ ó $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n>1)$, y sus integrales indefinidas son

i) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + C.$

ii) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \text{ si } n \neq -1.$

Las integrales indefinidas de fracciones simples con factores cuadráticos irreducibles en el denominador se calculan como sigue:

iii) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-r)^2+s^2}\,dx = \frac{A}{2}\log((x-r)^2+s^2) + \frac{Ar+B}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-r}{s}\right) + C$

iv) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\left((x-r)^2+s^2\right)^n}\,dx = \int \frac{A(x-r)+Ar+B}{\left((x-r)^2+s^2\right)^n}\,dx =$

$$= \frac{-A}{2(n-1)\left((x-r)^2+s^2\right)^{n-1}} + (Ar+B)\int \frac{dx}{\left((x-r)^2+s^2\right)^n}$$

y para resolver la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{((x-r)^2+s^2)^n}$ se hace el cambio de variable $(x-r)/s = t$ y se transforma en la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ que se puede resolver mediante la fórmula de reducción.

Si llamamos $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $\forall n \in N$, se tiene que

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

si se aplica esta fórmula, de manera reiterada si es preciso, y teniendo en cuenta que $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, se obtiene el valor de la integral I_n.

Observaciones:

1) *La obtención de la fórmula de reducción anterior se realizará en el problema resuelto 7 (obsérvese que el valor de I_1 es el correspondiente al apartado iii).*

2) *Para integración de funciones racionales cuyo denominador tenga raíces con multiplicidad alta, existen métodos que requieren menos cálculos. El más conocido es el método de Hermite, que no hemos incluido ya que sistemas de cálculo simbólico tan fáciles de manejar como DERIVE resuelven bastante bien integrales racionales.* ó MAXIMA

A "mano" o a "máquina", la dificultad sería en la obtención de primitivas de funciones racionales es la de averiguar las raíces del denominador (para iniciar la descomposición en fracciones simples).

4. Integración de funciones reducibles a racionales

4.1. Integrales de funciones $R(f(x))$ con R una función racional y f una función cuya inversa tiene derivada racional

Ejemplos de estas funciones son $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = e^x, \ldots$ Para este tipo de funciones, el cambio de variable $f(x) = t$ transforma la integral en racional.

4.2. Integración de funciones trigonométricas

Las integrales del tipo $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ con R función racional siempre se reducen a una integral racional con el cambio $\operatorname{tg}(x/2) = t$. Con dicho cambio se pueden realizar las siguientes sustituciones:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

En algunos casos, hay otros cambios de variable que también reducen la integral a una integral racional, más sencilla que la que se obtiene con el cambio anterior. Son los siguientes:

i) Si R es una función impar en $\operatorname{sen} x$ (es decir $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$) se resuelve con el cambio $\cos x = t$.

ii) Si R es una función impar en $\cos x$ (es decir $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$) se resuelve con el cambio $\operatorname{sen} x = t$.

iii Si R es una función par en $\operatorname{sen} x$ y en $\cos x$ ($R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$) se resuelve con el cambio $\operatorname{tg} x = t$.

iv) Las integrales $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx$, $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx$ y $\displaystyle\int \cos ax \cos bx\,dx$ se transforman en integrales inmediatas mediante las fórmulas

$$2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$
$$2\cos A \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$
$$2\operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)$$

4.3. Integración de algunas funciones irracionales

Las integrales del tipo $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right) dx$ con R función racional y $m, n, \ldots, p, q$ enteros se resuelven con el cambio de variable $(ax+b)/(cx+d) = t^\alpha$, siendo $\alpha = \operatorname{mcm}(n, \ldots, q)$, que convierte la integral en racional.

4.4. Integración de algunas funciones irracionales cuadráticas

Las integrales $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})\,dx$ y $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$ con R función racional se pueden reducir a alguno de los tipos analizados anteriormente mediante los siguientes cambios de variable:

SOLUCIÓN:

a) Eligiendo $\log x = u$ y $x^5\,dx = dv$ se tiene $v = \dfrac{x^6}{6}$ y la integral por partes se puede obtener como

$$\int x^5 \log x\,dx = \frac{x^6}{6}\log x - \frac{1}{6}\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}\log x - \frac{x^6}{36} + C = \frac{x^6}{36}[6\log x - 1] + C.$$

b) Escogiendo $e^x = u$ y $\cos x\,dx = dv$, se tiene $v = \operatorname{sen} x$ y con ello

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Si ahora tomamos en la última integral $e^x = u$ y $\operatorname{sen} x\,dx = dv$ $(v = -\cos x)$, queda

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right),$$

que es equivalente a $I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I$. Por tanto

$$I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

Es decir,

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C.$$

---

4. *Obtener una fórmula de reducción para la integral* $I_n = \int x^n e^x\,dx$.

SOLUCIÓN:

Integramos por partes haciendo $x^n = u$ y $e^x\,dx = dv$, con lo que $du = nx^{n-1}\,dx$ y $v = e^x$. Se tiene

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx$$

obteniéndose la fórmula

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}.$$

Puesto que $I_0(x) = \int e^x\,dx = e^x$, se puede concluir que

$$I_1 = xe^x - e^x$$
$$I_2 = x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$
$$I_3 = x^3e^x - 3(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$$
$$\ldots$$

---

5. *Integrando por partes, deducir la fórmula de reducción*

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

SOLUCIÓN:

Haciendo $\operatorname{sen}^{n-1} x = u$ y $\operatorname{sen} x\,dx = dv$ será $v = -\cos x$, con lo que se tiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x\,dx &= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx\\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx.\end{aligned}$$

Entonces

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

En consecuencia

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

---

6. *Calcular las integrales de funciones racionales siguientes:*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

SOLUCIÓN:

a) Realizamos la descomposición en fracciones simples y hacemos las integrales de las funciones elementales.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-4x+3} &= \int \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\log|x-3| - \frac{1}{2}\log|x-1| + C\\ &= \log\sqrt{\left|\frac{x-3}{x-1}\right|} + C\end{aligned}$$

b) De forma análoga al apartado anterior

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$
$$= \log|x+2| + \frac{1}{x+2} + C$$

c) En este caso, el numerador es un polinomio de mayor grado que el denominador; por ello, para empezar, realizamos la división. Notemos también que el denominador no tiene raíces reales.

$$\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx = \int \left(x - 4 + \frac{2x+52}{x^2+4x+13}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}\,dx + \int \frac{48}{x^2+4x+13}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \log(x^2+4x+13) + 48\int \frac{dx}{(x+2)^2+9}$$
$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \log(x^2+4x+13) + \frac{48}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}$$
$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \log(x^2+4x+13) + \frac{48}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$$

NOTA: *En la integral del último sumando se ha realizado el proceso de "completar" un cuadrado perfecto para buscar la derivada de un arcotangente.*

d)

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{x} + \log|x-1| - \log|x+1| + C$$

e)

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+1}{x^2+4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x\,dx}{x^2+4} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$
$$= \frac{1}{6}\log(x^2+1) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\log(x^2+4) - \frac{1}{3}\int \frac{1/4\,dx}{(x/2)^2+1}$$
$$= \frac{1}{6}\log\frac{x^2+1}{x^2+4} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

---

7. *Sea* $I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

   a) Obtener la fórmula de reducción

$$I_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(x) \qquad \forall n \geq 2.$$

   b) Calcular $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3}$

SOLUCIÓN:

a) $I_n(x) = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{2x}{(x^2+1)^n}\frac{x}{2}dx.$

En la última integral utilizamos el procedimiento de integración por partes, haciendo $u = \frac{x}{2}$ y $dv = \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx$, con lo que $v = \frac{-1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$ y se tiene

$$I_n(x) = I_{n-1}(x) + \frac{x}{2}\frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$
$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + I_{n-1}(x) - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}(x)$$
$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(x)$$

b) Para calcular esta integral, teniendo en cuenta que el denominador no tiene raíces reales, aplicaremos la fórmula de reducción anterior, realizando previamente los cambios oportunos para convertirla en una integral de tipo I_n. Es decir, la ponemos de la forma $\int \frac{dx}{\left((x-r)^2+s^2\right)^3}$ y después hacemos el cambio $(x-r)/s = t$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3} = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2^2\right)^3}$$

El cambio $(x+1)/2 = t$ transforma la integral en

$$\int \frac{2}{(4t^2+4)^3}\,dt = \frac{2}{4^3}\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$$
$$= \frac{1}{32}I_3(t) = \frac{1}{32}\left(\frac{t}{2(3-1)(t^2+1)^{3-1}} + \frac{6-3}{6-2}I_2(t)\right)$$
$$= \frac{1}{32}\left[\frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}I_1(t)\right)\right]$$
$$= \frac{t}{128(t^2+1)^2} + \frac{3t}{256(t^2+1)} + \frac{3}{256}\operatorname{arctg} t + C$$
$$= \frac{x+1}{16(x^2+2x+5)^2} + \frac{3(x+1)}{128(x^2+2x+5)} + \frac{3}{256}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

8. *Calcular*

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x)^3\,dx$

SOLUCIÓN:

a) Hacemos el cambio $e^x = t$, con lo que $x = \log t$ y $dx = dt/t$. Entonces

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

b) Realizamos el cambio de variable $\operatorname{tg} x = t$ con lo que $x = \operatorname{arctg} t$ y $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Así

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int t^3\,\frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

y ésta es una integral racional cuya solución es $\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}\log(t^2+1) + C$ por lo que

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\log(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C.$$

---

9. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+2\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN:

Para reducirla a una integral racional, hacemos el cambio clásico $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ con lo cual

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Así,

$$I = \int \frac{dx}{1+2\operatorname{sen} x} = \int \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{1+2\dfrac{2t}{1+t^2}}\,dt$$
$$= \int \frac{2}{1+t^2+4t}\,dt = 2\int \frac{dt}{t^2+4t+1}$$

integral racional cuya solución es

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\log(t+2-\sqrt{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\log(t+2+\sqrt{3}) + C$$

y deshaciendo el cambio, se obtiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right) - \log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}\right)\right] + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right) + C$$

---

10. *Calcular*

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\cos^2 x}\,dx$

SOLUCIÓN:

a) La función del integrando es par en seno y coseno, por lo que es conveniente el cambio $\operatorname{tg} x = t$, con lo que

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

entonces

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{1+\dfrac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+2t^2)(1+t^2)}$$

que es una integral racional cuya solución es

$$\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) - \operatorname{arctg} t + C$$

Luego deshaciendo el cambio

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) - x + C$$

b) Puesto que la función es impar en el seno, hacemos el cambio $\cos x = t$ y se obtiene

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

---

11. *Calcular* $\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)\,dx$.

SOLUCIÓN:

Por las propiedades de las funciones trigonométricas podemos poner el producto de funciones del integrando como una suma.

$$\operatorname{sen}(5x)\cos(6x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(5x+6x) + \operatorname{sen}(5x-6x)\right);$$

entonces

$$\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen}(11x)\,dx - \int \operatorname{sen} x\,dx\right] = \frac{-1}{22}\cos(11x) + \frac{1}{2}\cos x + C$$

12. *Calcular* $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCIÓN:

Se trata de la integral de una función irracional, con un radical cuadrático. Hacemos el cambio $x = \operatorname{sen} t$, con lo que $dx = \cos t\,dt$ y $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Entonces

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\operatorname{sen} t + \cos t}.$$

Esta integral se podría calcular mediante el cambio $\operatorname{tg} x/2 = t$; pero resulta mucho más sencillo calcular simultáneamente las integrales

$$I_1 = \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t + \cos t}\,dt \qquad I_2 = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t + \cos t}\,dt,$$

ya que

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\cos t + \operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t + \cos t}\,dt = \int 1\,dt = t + C_1$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t + \cos t}\,dt = \log|\operatorname{sen} t + \cos t| + C_2.$$

De donde se obtiene

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(t + \log|\operatorname{sen} t + \cos t|\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(t - \log|\operatorname{sen} t + \cos t|\right).$$

En particular,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + \log\left|x + \sqrt{1-x^2}\right|\right) + C.$$

13. *Calcular las siguientes integrales:*

a) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ *b)* $\int \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$

SOLUCIÓN:

a) Hacemos el cambio de variable $x = \cosh t$, de donde se obtiene $dx = \operatorname{senh} t\,dt$ y $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{senh} t$. Así

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{(\cosh t)^2(\operatorname{senh} t)}{\operatorname{senh} t}\,dt = \int (\cosh t)^2\,dt$$
$$= \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{senh} 2t}{2} + \frac{t}{2} + C$$

Dado que $\operatorname{senh} 2t = 2\operatorname{senh} t\cosh t$, se tiene $\operatorname{senh} 2t = 2x\sqrt{x^2-1}$, y por tanto,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{argch} x + C.$$

b) Si hacemos el cambio $e^x = t$, con lo que $e^x\,dx = dt$, la integral se convierte en

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

que es la misma del apartado anterior. Por tanto

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \frac{1}{2}e^x\sqrt{e^{2x}-1} + \frac{1}{2}\operatorname{argch} e^x + C.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Calcular la integral* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

INDICACIÓN: *Multiplicar y dividir por* $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$.

2. *Calcular las siguientes integrales:*

a) $\int \dfrac{x+3}{(x^2+6)^{1/3}}\,dx$ *b)* $\int \dfrac{\operatorname{arcsen} x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

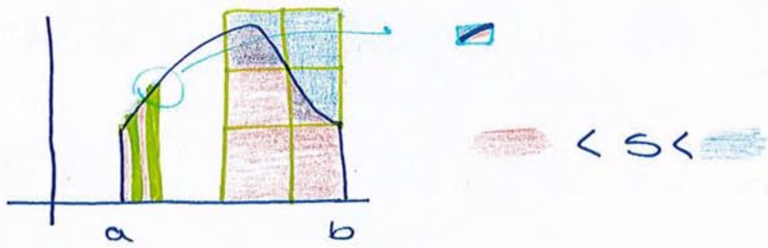
INTEGRACIÓN

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x|$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

Integral definida ≡ Integral (Área)

Integral indefinida ≡ cálculo de Primitivas.



Vamos haciendo cada vez más subdivisiones.

Intervalos → $[a,b]$

Definición: n- Partición regular en $[a,b]$

Sucesión de n+1 puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$$

tal que $\quad x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n} \quad \forall i$

Definición: suma superior (U_{Pn}), suma inferior (L_{Pn}), de una función f (ACOTADA) →

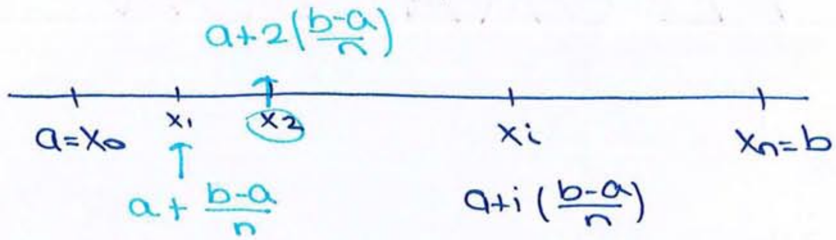
→ $(\exists K \,/\, |f(x)| < K)$ asociada a la partición (P_n).

$$U_{Pn} = \frac{b-a}{n} f(x_1^*) + \frac{b-a}{n} f(x_2^*) + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_n^*)$$

$$L_{Pn} = \frac{b-a}{n} f(x_1') + \frac{b-a}{n} f(x_2') + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_n')$$

Donde $\begin{vmatrix} x_i^* \\ x_i' \end{vmatrix}$ toma valor $\begin{vmatrix} \text{Máximo} \\ \text{Mínimo} \end{vmatrix}$

cuando $n \to \infty$



x_{i+1} se acerca a x_i $\quad x_i^*$ $\quad x_i'$ y todos

$$x_{i+1} = x_i = x_i^* = x_i'$$

Definición:

$$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} U_{P_n} = \lim_{n\to\infty} L_{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a+1\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) + f\left(a+2\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + f\left(a + n\,\frac{b-a}{n}\right)\right) =$$

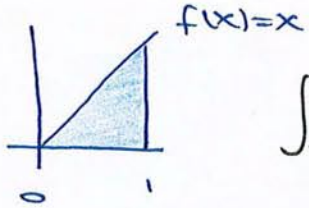
$$= \lim_{x\to 0} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Ejplo: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\operatorname{sen} x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n}\left(f(\pi) + f\left(\pi + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots\right.$

$$\left. + \ldots + f\left(\pi + n\frac{2\pi}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n}\left(e^{\operatorname{sen}\pi} + e^{\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{2\pi}{n}\right)} + \ldots + e^{\operatorname{sen}\left(\pi + n\frac{2\pi}{n}\right)}\right)$$

$f(x) = x$



$$\int_0^1 f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum \left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \left(0 + i\,\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(\tfrac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)$$

FÓRMULA: $1+2+3+\dots\dots+(n-1)+n \rightarrow f = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\int_0^1 x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2} \,//$$

Málaga 4-11-10

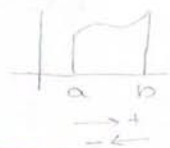
Propiedades básicas:

① $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

② $\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

¡ojo! ③ $\cancel{\int_a^b f \cdot g = \int_a^b f \cdot \int_a^b g}$ Esto es Falso

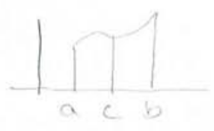
④ Definición $a \leq b$ $\int_b^a f := -\int_a^b f$

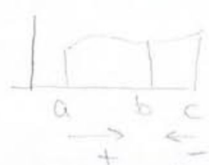


en particular $a \leq a$ $\int_a^a f = -\int_a^a f \Rightarrow \boxed{\int_a^a f = 0}$

⑤ $\forall c$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$





Problema 52.

f integrable

$$\int_0^1 f = 6 \quad \int_0^2 f = 4 \quad \int_2^5 f = 1 \qquad ¿\int_1^5 f = ?$$

$$\int_1^5 f = \int_1^0 f + \int_0^2 f + \int_2^5 f = -6 + 4 + 1 = -1$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Definición Función "Área acumulada".

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable (que tiene área).

Se define $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f$$

Ejplo 1. $f(t) \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < t \le 2 \end{cases}$ $\qquad f : [0,2] \to \mathbb{R}$

Esto vale $x-1$

$2(x-1)$

$2x-2$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 = x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \int_0^x f = \int_0^1 1 + \int_1^x 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

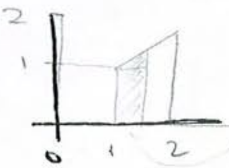
$$\boxed{\int_0^x f = 1 + (2x-2) = 2x-1}$$

cont

no deriv.

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$f(t) \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ t & \text{si } 1 < t \le 2 \end{cases}$

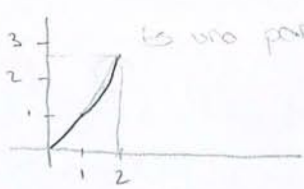


sumando será: $1(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 =$

$= x - 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 = x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \int_0^x f = \int_0^1 1 + \int_1^x t = 1 + x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Gráfica de $F(x)$:



Es una parábola

Teorema: si f y F son las funciones anteriormente descritas:

a) si f es integrable entonces F es continua.

b) si f es continua entonces F es derivable y

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

ejplo: $\frac{d}{dx}\left(\int_5^x \operatorname{sen} t\right) = \operatorname{sen} x$

$$F(x) = \int_5^x \operatorname{sen} t \qquad F'(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5 \cdot 0$$

$$F(x) = \int_{10}^{x^2} \ln(1+t) = \ln(1+x^2)\cdot 2x + \ln(1+10)\cdot 0$$

$$(\operatorname{sen}(x^2))' = \cos(x^2)\,2x$$

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \operatorname{sen}(x^2)$$

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \int_{10}^{x^2} f$$

$$F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^2} \ln(1+t) = \int_{\operatorname{sen} x}^{2} \ln(1+t) + \int_2^{x^2} \ln(1+t) =$$

$$= -\int_2^{\operatorname{sen} x} \ln(1+t) + \int_2^{x^2} \ln(1+t) =$$

$$= -(\ln(1+\operatorname{sen} x)\cos x) + \ln(1+x^2)\,2x = F'x$$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y para hacer h muy peq: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

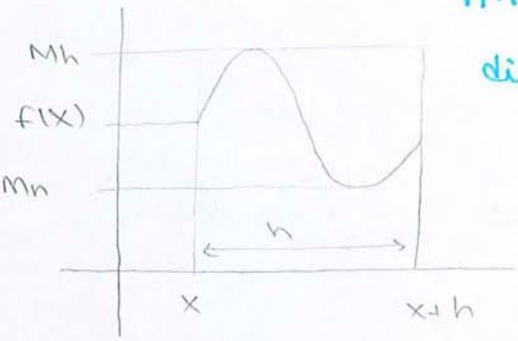
Demostración del ap. b)

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\int_a^x f} + \int_x^{x+h} f - \cancel{\int_a^x f}}{h} =$$

$h \cdot m_h \leq \int_x^{x+h} f \leq h \cdot M_h$

dividido por h



$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = f(x)$$

$$m_h \leq \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \leq M_h$$

cuando $h \to 0$

$m_h \to M_h \to f(x)$

Corolario: Regla de Barrow.

Si $G(x)$ es una primitiva cualquiera de f, es decir $F(x) = G(x) + K$, entonces

$$\int_a^b f = F(b) = F(b) - 0 = F(b) - F(a) =$$

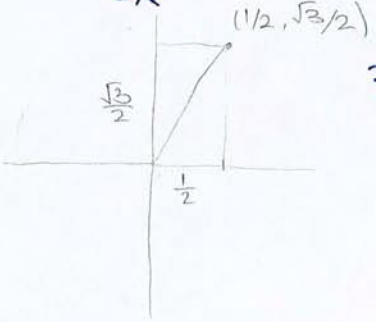
$$= [G(b) + \cancel{K}] - [G(a) + \cancel{K}] = G(b) - G(a).$$

Eplo: $\int_2^5 2x+1 = x^2 + x \Big]_2^5 = (5^2+5)-(2^2+2)$

 Málaga 4-11-10

Tma del cambio de variable.

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx \quad \text{primitiva "integral indefinida"}$$



<u>Derivación implícita</u>

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \left|\; x^2 + [f(x)]^2 = 1 \right.$$

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \qquad \left|\; 2x + 2f(x)\cdot f'(x) = 0 \;; \right.$$

$$; f'(x) = \frac{-2(x)}{2f(x)} = \frac{-x}{y}$$

$$f'(1/2) = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

<u>Teorema</u>: si $x = g(t)$

a) $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,d(g(t)) \overset{\downarrow}{=} \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,d(g(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))\,g'(t)\,dt$

donde
$a = g(t_1)$
$b = g(t_2)$

Ejplo: $\int_0^1 (2x^3+1)^7 x^2\,dx =$

<u>suponemos</u> $\boxed{t = 2x^3+1}$ $\qquad x = g(t)$

$t = 2[g(t)]^3 + 1$

$1 = 6[g(t)]^2 \cdot g'(t)$

$$g'(t) = \frac{1}{6[g(t)]^2}$$

$$= \int t^7 \cancel{x^2} \frac{1}{6\cancel{x^2}}\,dt = \int \frac{1}{6} t^7\,dt = \frac{1}{6}\,\frac{1}{8}\,t^8$$

$1\,dt = 6x^2\,dx$ $\qquad \| \int (2x^3+1)^7 x^2\,dx = \int t^7 x^2 \frac{1}{6x^2}\,dt$

$dx = \frac{1}{6x^2}\,dt$

Ahora vamos a calcular los límites de integración.

$t = 2x^3 + 1$

si $\underline{a = 0} \to t = 1$

si $\underline{b = 1} \to t = 3$

entonces:

$\frac{1}{6}\,\frac{1}{3}\,t^3\Big]_1^3$ Es el resultado final sin deshacer el cambio.

Generalización de la Integral.

Integración impropia.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}\,dx = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\Big]_0^2 = \frac{1}{1-x}\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -2$$ ¿Porqué? Porque no está acotada.

$$\lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{1-x}\Big]_0^t + \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{1-x}\Big]_t^2 =$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) + \lim_{t\to 1^+} \left(-1 - \frac{1}{1-t}\right)$$

$$\infty \quad + \quad \infty \quad = \infty$$

→ como esta integral es divergente porque da ∞.

Ejplo: $\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x}\,dx =$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{2^x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t 2^{-x} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{\ln 2} \int_1^t 2^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{\ln 2} \cdot 2^{-x}\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{\ln 2} \left(\underbrace{\cancel{2^{-t}}}_{0}-2^{1}\right) =$$

$2^{-\infty}$

$\frac{1}{2^{\infty}}$

$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot 2 \simeq 2'88$$

Málaga 8-11-10

Aplicaciones de la Integral al cálculo de Áreas y Volúmenes:

$f(x) = x(x-1)(x-3)$

$g(x) = -x(x-2)(x-4)$

Áreas delimitadas:

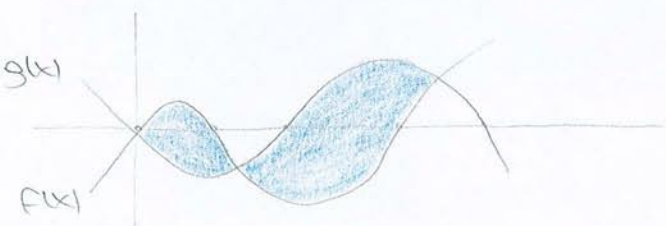
sabemos $\int_a^b f$

Ejplo: $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen} x\,dx$

Área delimitada entre f(x) y g(x)

f(x) →

g(x) →

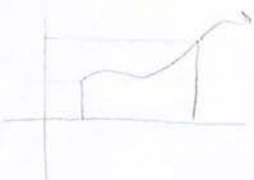
Los ptos de corte son:

$$x(x-1)(x-3) = -x(x-2)(x-4) ; \ldots \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ x_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

entonces:

$$\int_0^{\frac{5+\sqrt{3}}{2}} |f-g| = \int_0^{\frac{5-\sqrt{3}}{2}} x(x-1)(x-3) + (x)(x-2)(x-4)\,dx +$$

$$+ \int_{\frac{5-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{3}}{2}} -x(x-1)(x-3) - x(x-2)(x-4)\,dx$$



$f(x) = x^2$

$x \longrightarrow f(x)$

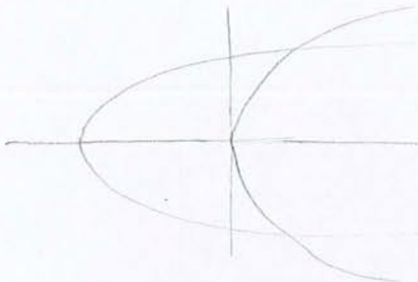
$f'(y) \longleftarrow y$

$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$

$f(x) = x^2$

$f(y) = \sqrt{y}$

Hallar el área entre las curvas: $\begin{cases} 2y^2 = x+4 \rightarrow x = 2y^2-4 \\ y^2 = x \end{cases}$



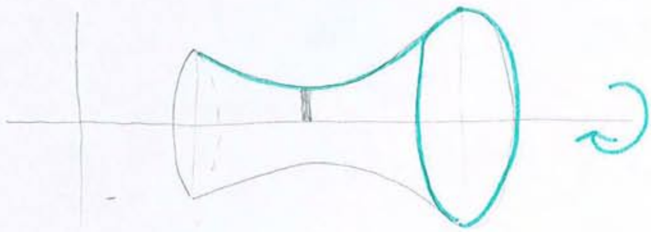
$$2y^2-4=y^2$$
$$y^2-4=0$$
$$y=\pm 2$$

$$\int_{-2}^{2} y^2-(2y^2-4) = \int_{-2}^{2} (-y^2+4)\,dy = \left[-\frac{y^3}{3}+4y\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left[-\frac{8}{3}+8\right]-\left[\frac{8}{3}+8\right]$$

Volumen de Revolución : Discos

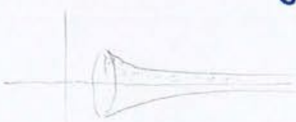
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)$$



El volumen será:

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 = \int_a^b \pi f^2}$$

→ calcular a) el área que hay en $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$; y calcula b) su volumen: $\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$.



a) $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln x\Big]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\underbrace{\ln t}_{\infty} - \underbrace{\ln 1}_{0}) = \infty$$

b) $$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\pi\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{x}\Big]_{+1}^{t} =$$

$$= \pi\lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{\frac{-1}{t}}_{0} - \underbrace{\frac{-1}{1}}_{+1}\right) = \pi$$

Calcula el volumen de la Esfera de Radio 1.

$$x^2+y^2=1 \longrightarrow y=+\sqrt{1-x^2}$$

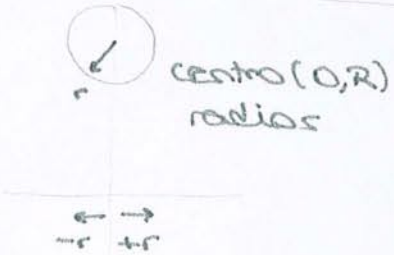
$$V=\int_{-1}^{1} \pi \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$$

$$\pi \cdot 2\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx =$$

$$= 2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Calcula el Área de un Toro.

TORO:



$$x^2+(y-R)^2=r^2$$

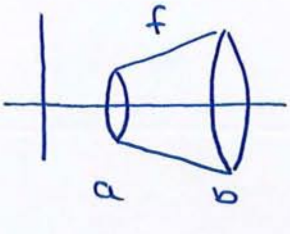
$$(y-R)^2=r^2-x^2$$

$$y-R=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

$$y=R\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

con + es la parte de arriba.

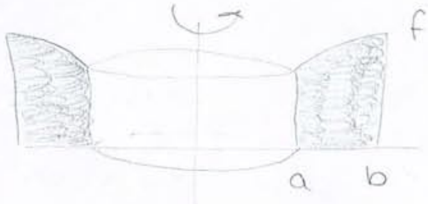
$$V_{TORO}= 2\pi\int_0^r \left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)dx - 2\pi\int_0^r \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$$

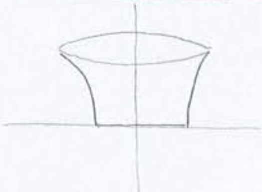


$$V=\int_a^b \pi (f(x)-k)^2$$

Volumen por capas:

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx}$$





$$\boxed{\int_{f(a)}^{f(b)} \pi\, f^{-1}(y)\,dy}$$

Volumen toro por capas, R,r.

centro (R,0)

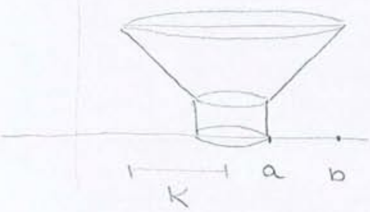
radio r

$$(x-R)^2+y^2=r^2$$

$$y=\pm\sqrt{r^2-(x-R)^2}$$

$$V_{TORO}=2\cdot 2\pi\int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2-(x-R^2)}\;dx$$

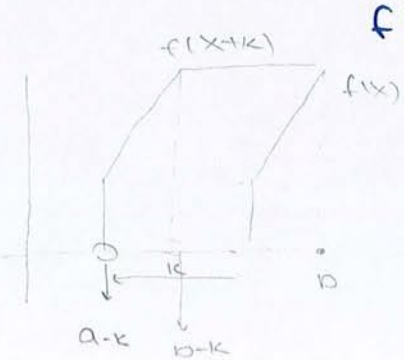
$$\boxed{V_{TORO}=2\pi^2 R r^2}$$



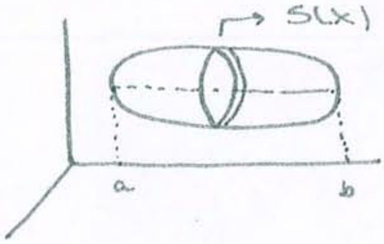
$$=\int_a^b 2\pi x\, f(x+k)$$

$$f(x)=2x^2+1$$

$$f(x+k)=2(x+k)^2+1$$

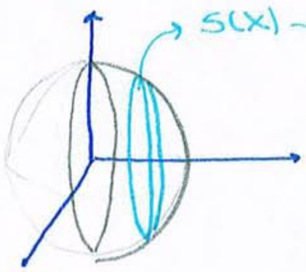


Volumen por secciones:



$$\boxed{V=\int_a^b S(x)\,dx}$$

ejlo: Volumen Esfera radio R.



$y=\sqrt{R^2-x^2}$

$S(x)=\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)$

$$V=2\int_0^R S(x)\,dx=2\int_0^R \pi\,(R^2-x^2)\,dx$$

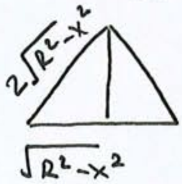
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Problema.

$x^2+y^2=R^2$

$y=\sqrt{R^2-x^2}$

triángulo : $\dfrac{b\cdot h}{2}$

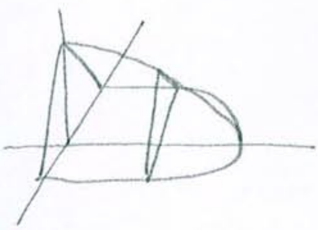


por pitágora

$\sqrt{3}\,\sqrt{R^2-x^2}$

$$S(x)=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\,\sqrt{R^2-x^2}}{2}$$

$$\boxed{S(x)=\sqrt{3}\,(R^2-x^2)}$$



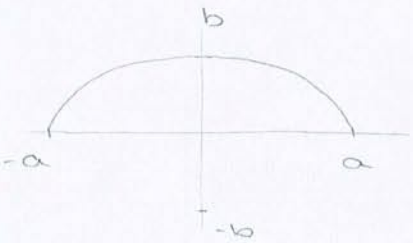
$$V=2\int_0^R S(x)\,dx=2\int_0^R\sqrt{3}\,(R^2-x^2)\,dx$$

$$\boxed{V=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3}$$

Ejlo: Volumen Elipsoide, a,b,c.

Área de una Elipse: πab

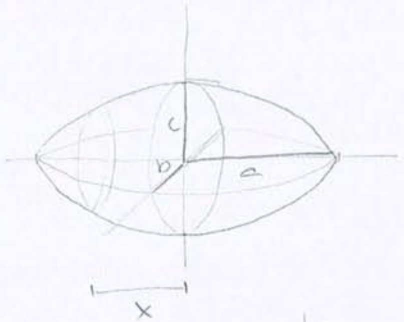
Fórmula de la Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

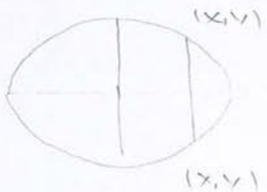


$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$y = + \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$$

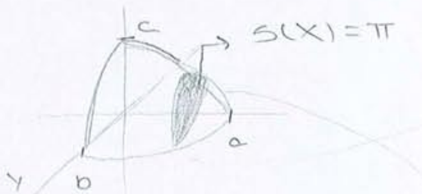
$$S = 4\int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx = \ldots = \pi ab$$





$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}}$$



$$S(x) = \pi\left(\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\right)$$

La Elipse del suelo es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ahora calculo z:

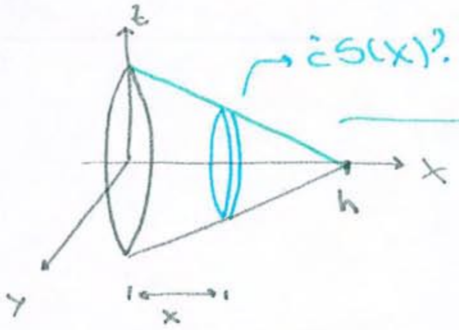
$$\boxed{z = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$V = 2\int_0^a \pi\left(\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\right)\left(\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}\right)dx$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi abc}$$

volumen cono, radio r, altura h.



Recta que pasa por $\begin{cases} (0,r) \\ (h,0) \end{cases}$

Recta =

$$X = \frac{-r}{h}(-r)$$

$$Y - r = \frac{-r}{h}(x) \longrightarrow Y = \frac{-r}{h}x + r$$

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{-r}{h}x + r\right)^2 dx = \ldots\ldots = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

RESUMEN TEMA 2. FUNCIONES e INTEGRALES.

Paso de cartesianos a Polares

$tg\theta = \frac{y}{x}$ $\qquad r^2 = x^2 + y^2$ $\qquad x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$

Búsqueda del polinomio aproximador:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Fórmula de Taylor:

$$T_{x_0,n}(f(x)) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Fórmulas a saber:

$$T_{0,n}(e^x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$T_{0,n}(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad \ln(1+x) = \sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$T_{0,n}(\text{sen}\,x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$T_{0,n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Teorema de Taylor: El Error (Resto de Taylor).

$$|E_n| = \left|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \qquad \text{Donde } c: x_0 < c < x$$

Teorema:

Dada $f(x)$, $g(x)$, entonces:

1. $T_{x_0,n}(f \pm g) = T_{x_0,n}(f) \pm T_{x_0,n}(g)$
2. $T_{x_0,n}(f \cdot g) = T_{x_0,n}(f) \otimes T_{x_0,n}(g)$ Multiplicaciones cruzadas
3. $T_{x_0,n}(f / g) = T_{x_0,n}(f) \odot T_{x_0,n}(g)$ → División larga
4. composición o principio de sustitución

   $T_{x_0,n}(g(f(x))) = g(T_{x_0,n}f(x))$

Definición:

Dados $f(x)$, $g(x)$ infinitésimos en x_0 son:

a) equivalentes si $\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

b) $f(x)$ es de orden menor (+ rápido) en $g(x)$ cuando:

$T_{x_0,n}(f(x))$ es infinitésimo equivalente al $f(x)$.

Teorema:

Si una función puede expresarse de la forma:

$f(x)g(x)$ / $f(x)$ es infinitesima e x_0 equivalente a $k(x)$.

Entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim \frac{f(x)k(x)}{k(x)} g(x) = \lim \frac{f(x)}{k(x)} k(x)g(x) =$$

$$= \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim k(x)g(x) = \lim k(x)g(x).$$

INTEGRACIÓN

$$\int_a^b f := \lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \left(f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Propiedades básicas:

① $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

② $\int_a^b f\pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

③ ~~$\int_a^b f\cdot g = \int_a^b f \cdot \int_a^b g$~~ NO

④ $\int_b^c f(x) := -\int_a^b f(x)$

⑤ $\forall c$
$\int_a^b f(x) = \int_a^c f + \int_c^b f$

Área:

$$S = 2\pi \int_a^c f(x) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Teorema Fundamental del cálculo.

$$\boxed{F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))a'(x)}$$

Tma. cambio de Vble.

a) $\int f(x)dx = \int f(g(t))\, d(g(t)) = \int f(g(t))\, g'(t)dt$

Volúmenes:

- Capas:
$V = 2\pi\int_a^b x f(x)dx$

- Discos:
$V = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum \pi f(x_i)^2 = \int_a^b \pi f^2$

$$\boxed{V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx}$$

- Secciones
$V = \int_a^b s(x)dx.$