Málaga 15-11-10

TEMA 3: SERIES

- series numéricas
- series funcionales $\begin{cases} \text{- De potencias} \\ \text{- De Fourier} \end{cases}$

Definición: Límite

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 / n > n_0 \quad |a_n - L| < \varepsilon}$$

Definición: sucesión de sumas parciales.

De $\{a_n\}$ es $\{S_n\}$

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

....

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$

$\{S_n\} = \{a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Límite:

$\{a_n\} \rightarrow l$ único $\rightarrow$ Converge (un nº)

$\{a_n\} = \{1, 0, 1, 0 \ldots\} \longrightarrow$ Diverge

$\{a_n\} = \infty \longrightarrow$ Diverge

Ejemplos:

$\{a_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1 \ldots\}$

$\{S_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1\} \rightarrow$ no se puede sumar: Diverge

$\{a_n\} = \{1, 1, 1, 1, 1 \ldots\}$

$\{S_n\} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ Diverge.

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \geq 1}$$

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \ldots \cdot \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{Término general.}}\right\}$$

* **TRUCO:** $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

→ lo multiplico por la razón : $r = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cdot S_n = \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Entonces:

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \longrightarrow S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$ → la serie es convergente.

Definición: SERIE.

Dada $\{a_n\}$ entonces $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ se llama serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$ y será:

- Un número $\quad \sum \frac{1}{2^n} = 1$ → S. convergente
- $\infty \quad \sum 1 = \infty$ $\Big\}$ Divergente
- nada $\quad \sum(-1) = \text{nada}$

Teorema:

Si $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ converge, entonces necesariamente $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, no necesariamente tiene que ser converg.

Ejemplo: De $\{a_n\} \to 0$, pero suma $\to \infty$.

$\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie Armónica).

$$S = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} >$$

$$\cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen}^2 n}{n} = \frac{1+\operatorname{sen}^2 1}{1} + \frac{1+\operatorname{sen}^2 2}{2} + \dots$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1+\operatorname{sen}^2 n}{n}$$

* Serie Armónica: serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \to$ Diverge

* Serie Geométrica: serie $\sum_1^{\infty} r^n \to$ converge si $|r|<1$

Málaga 18-11-10

→ condición necesaria: $\boxed{\text{Si } \sum a_n \text{ converge entonces } a_n \to 0.}$

Teorema: Dada $\sum_1^{\infty} a_n$ entonces tiene el mismo carácter $\sum_1^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$\sum 2^n a_{2^n} = a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + \dots$$

Teorema: Condensación.

$$\boxed{\sum a_n \Longleftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}}$$

Problema 4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leftrightarrow \sum_1^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum \left(\frac{2}{2^p}\right)^n$$

Al ser S. Geométrica $\frac{2}{2^p} < 1 \leftrightarrow 2^1 = 2^p$

cuando $\boxed{p > 1}$.

Ejplo: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \to$ NO $\frac{1}{n^{1/2}}$

$\sum \frac{1}{n^{1'01}} \to$ Si

Mayor convergente
menor divergente

Teorema: **comparación:**

si $0 < a_n \leq b_n$ entonces:

ⓐ si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge

ⓑ si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.

Propiedades:

1.- $\sum_1^{\infty} k a_n = k \sum_1^{\infty} a_n$

2.- $\sum_1^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_1^{\infty} a_n + \sum_1^{\infty} b_n$

3.- $\cancel{\sum_1^{\infty} (a_n \cdot b_n) = \sum_1^{\infty} a_n \cdot \sum_1^{\infty} b_n}$ No es cierto!

Ejemplo:

$$\sum \frac{1}{2n+3}$$

cojo una menor: $\sum \frac{1}{5n}$

$$\sum \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \sum \frac{1}{n} \leq \sum \frac{1}{2n+3} \longrightarrow \underline{\text{Diverge}}$$

← esta es la Armónica.

Tabla de Infinitos.

$$\boxed{\begin{array}{c} n^n > n! > k^n > n^a > \ln n \\ (k>1) \quad (a>0) \end{array}}$$

Teorema: **Comparación por paso al límite.**

Dados $\sum a_n$, $\sum b_n$:

si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = N$ $(\neq 0, \neq \infty)$

entonces las series tienen el mismo carácter.

Ejemplos:

$$\sum \frac{n^2}{6^n} = \sum n^2 \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{si } \frac{1}{6} < 1 \quad \text{convergente.}$$

$$\sum n^2 2^n \quad \text{NO } 2<1 \rightarrow \text{Diverge}$$

$$\sum \frac{\ln n}{n} \geq \sum \frac{1}{n} \rightarrow \text{Diverge}$$

Tiene menor divergente.

$$\sum \frac{\ln n}{n^a} \quad a>0$$

$$\sum 2^n \frac{\ln 2^n}{(2^n)^a} = \sum 2^n \frac{n \ln 2}{2^{na}} =$$

$$= \ln 2 \sum \left(\frac{2}{2^a}\right)^n \cdot n$$

entonces : $\frac{2}{2^a} < 1$

$a > 1$

$$\sum \frac{n^a}{k^n} = \sum n^a \left(\frac{1}{k}\right)^n \quad \begin{matrix} k>1 \\ a>0 \end{matrix} \rightarrow \text{converge}$$

$$\sum \frac{k^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^{n+1}}{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1)\cdot n!}}}{\frac{k^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n+1} = 0 < 1$$

converge

$$\sum \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = e^{-1} < 1$$

converge

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Ejemplos:

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \rightarrow \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ convergente}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 \quad (\neq 0, \neq \infty)$$

$$\sum \frac{n^2+2n}{\sqrt[3]{n^{17}-n}} \rightarrow \sum \frac{1}{n^{17/3-2}} \text{ convergente}$$

$$\sum \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n} \rightarrow \text{diverge}$$

$$\sum \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Problema 5.

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \quad \text{(Por el criterio de condensación)}$$

$$\sum 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n}$$

Diverge

Teorema. Criterio del cociente.

Dada $\sum a_n$,

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \boxed{L<1} & \sum a_n \text{ converge} \\ L>1 & \sum a_n \text{ Diverge} \\ L=1 & ? \end{cases}$$

Aritmético - geométrica:

Problema 7.

$$\sum n^p r^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p r^{n+1}}{n^p r^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{r^n \cdot r}{r^n}$$

$= r$ converge si $|r|<1$

Tma: Criterio de RAABE (si no sirve el del cociente)

Dado $\sum a_n$:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \begin{cases} L>1 & \text{converge} \\ L=1 & ? \\ L<1 & \text{Diverge} \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n} = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}} = 1 \quad ?$$

→ Aplico RAABE:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+2}-\frac{2n+1}{2n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \longrightarrow \text{Diverge}$$

Teorema: Criterio de la Raíz.

Dado $\sum a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{1/n} = \begin{cases} L<1 & \text{converge} \\ L=1 & ? \\ L<1 & \text{Diverge} \end{cases}$$

Problema 10.b

$$\sum \left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}\right]^{1/n} = \lim \left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4-\frac{2}{n}} = \left(\frac{1}{7}\right)^4 < 1$$

Criterio Asintótico.

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$:

si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (\neq 0, \neq \infty)$ entonces:

$\sum a_n$, $\sum b_n$ tienen mismo carácter.

Ejemplos:

$\sum_1^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ tiene el mismo caracter que $\sum \frac{1}{n}$ que div.

$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{3!}$

$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \longrightarrow$ ¡Sólo importa el 1ero!

$$\underline{\sum_1^\infty \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}}$$

Es un Infinitésimo

$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \dots$

$$= \ln\left(1 + \frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right) = \frac{n^2+2}{n^2+1} - 1$$

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1 = \frac{n^2+2}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1}$$

$\sum \frac{n^2+2}{n^2+1}$ tiene el mismo carácter

de $\sum \frac{1}{n^2+1}$ que converge.

$\sum_1^\infty \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) =$ $\quad e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$e^x - 1 \sim x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$e^{1/n^2} - 1 \sim \left(\frac{1}{n^2}\right) + \dots$

entonces tiene el mismo carácter que $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$

converge.

Hasta ahora todas las series $\sum_1^\infty a_n$ han sido de "términos positivos". STP

Ejemplo:

$$\sum_1^\infty \frac{-n+10}{n^3} = \underset{\text{n° negat.}}{\underline{\qquad}} + \underset{\text{n° posit.}}{\underline{\qquad}} \quad (\infty)$$

$$\sum_1^\infty \frac{10-n}{n^3} = -\sum \frac{n-10}{n^3}$$

Se Resuelve poniendo un $\ominus$ y ya es $\circleddash$ que antes.

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{n}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} = \begin{matrix}\text{"}\infty \text{ positivos"} \\ \text{"}\infty \text{ negativos"}\end{matrix}$$

↳ esto es lo que se llama una serie alternada.

Teorema: Criterio de LEIBNITZ.

si $\{a_n\} \to 0$ decreciente entonces

$$\boxed{\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n \text{ converge}}$$

$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots$

0 a_2 a_4 a_3 a_1

Ejemplo:

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots\right) = \frac{1}{2} S$$

Definición:

Si $\sum(-1)^{n+1} a_n$ $[a_n \geq 0]$ es tal que en valor absoluto $\sum|(-1)^{n+1} a_n| = \sum a_n$ converge.

Entonces se dice que $\sum(-1)^{n+1}$ es absolutamente convergente.

En caso contrario será condicionalmente convergente.

$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ Es condicional convergente

$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ Es absolutamente convergente.

Teorema.

a) Si $\sum(-1)^{n+1} a_n$ es absolutamente convergente entonces suma lo mismo cualquiera que sea la reordenación.

b) Si $\sum(-1)^{n+1} a_n$ es condicionalmente convergente $\forall S$ existe reordenación. $\sum b_n = S$

Teorema.

Dada $\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 \dots$ con $a_n \geq 0$

$|E_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$

suma real — suma n primeros

Ejemplo

$\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ Dos cifras exactas Error $< 0'001$

$a_{n+1} < 0'001$

$a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$ $\boxed{n=4}$

Ocurre que $|E_4| < \frac{1}{11!}$ Nos sirve

$S_4 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$

Recordatorio:

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_n\}$$

$$\{S_n\} = \{a_1, a_1+a_2, \dots\dots, a_1+a_2+a_3+\dots+a_n\}$$

$$\sum a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Donde $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Definición: Serie de Funciones.

$\{f_n\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ todos en un dominio D.

$$\{f_n\} \quad \begin{aligned} f_n: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Problema 15.

a) $f_n(x) = (1-\frac{1}{n})x \qquad \forall x$ de $\mathbb{R}$

$f_1(x) = 0$

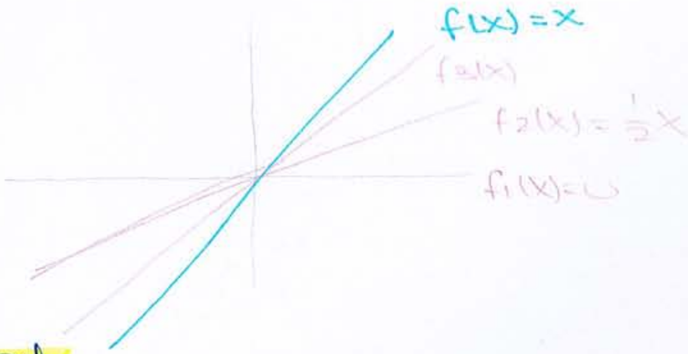
$f_2(x) = \frac{1}{2}x$

$f_3(x) = \frac{2}{3}x$

$f_4(x) = \frac{3}{4}x$

....

$\{f_n\} = \{0, \frac{1}{2}x, \frac{2}{3}x, \frac{3}{4}x \dots, (1-\frac{1}{n})x \dots\}$



Definición: Límite puntual.

Dada $\{f_n\}$, f es límite puntual si

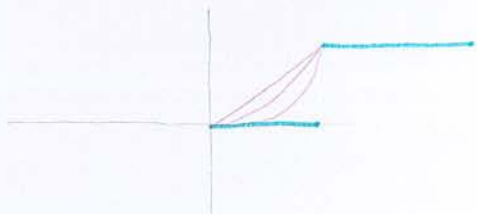
$$\forall x \in D \ \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Problema 15

b) $f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad D = [0, \infty)$

$f_1(x) = \begin{cases} x \\ 1 \end{cases} \qquad f_3 \begin{cases} x^3 \\ 1 \end{cases}$

$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \\ 1 \end{cases} \qquad \vdots$



T3.6

Series de Funciones.

$\sum_{1}^{\infty} f_n$ es el límite de

$$S_n = \{ f_1, f_1+f_2, \dots, f_1+f_2+\dots+f_n, \dots \}$$

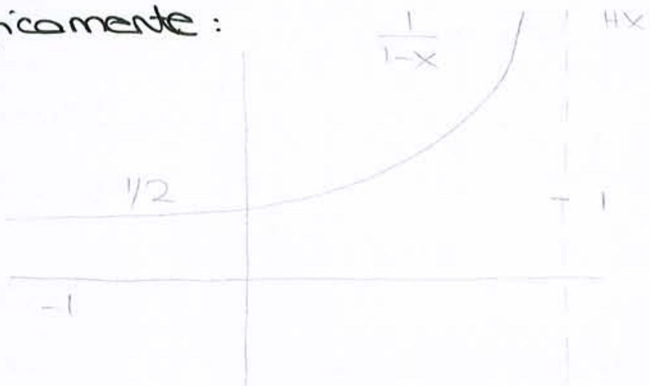
¿Qué es sumar funciones?

Ejemplo:

$$\{f_n\} = \{1, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$$

$$\sum_{1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Gráficamente:



$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = e^x$$ → Esto lo sacamos por Taylor

$$\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!} \dots \}$$

Definición: Serie funcional de "potencias" centradas en 0.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \{\text{donde } a_n \text{ es una sucesión}\} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Vamos a utilizar el criterio del cociente para ver que la suma anterior, e^x, es válida.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)n!} x^n \cdot x}{\frac{1}{n!} \cdot x^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 \cdot |x| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Problema 16

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$

Crit. cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \cancel{x^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n} \cancel{x^n}} \right| = \lim \frac{n}{2(n+1)} |x| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} |x| < 1 ; \qquad |x| < 2$$

-2 0 2

Los extremos 2 y -2 hay que analizarlos aparte.

$\boxed{x=2}$ $\sum \frac{1}{n2^n} 2^n \to$ Diverge

$\boxed{x=-2}$ $\sum \frac{1}{n2^n} (-2)^n = \sum \frac{(-1)^n (2)^n}{n 2^n} = \sum (-1)^n \frac{1}{n}$ Converge

crit. Leibnitz

entonces $[-2,2)$ converge.

Problema 16.

e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n(-1)}{\sqrt{n+1}} x^n x}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x| = 1\cdot |x| < 1$

El intervalo de convergencia es $(-1,1)$

$\boxed{x=-1}$ → Diverge

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(-1)^n = \sum \frac{[(-1)^n]^2}{\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\boxed{x=1}$

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1)^n = \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

→ Converge Leibnitz.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9 \cdots 3n} x^n$

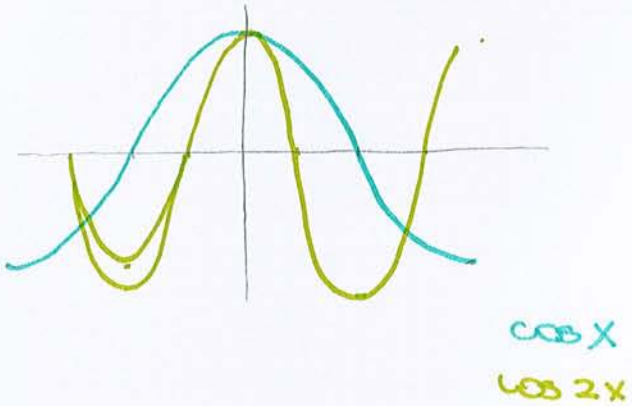
h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!} x^n\cdot x}{\frac{2^n}{(2n)!} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} |x| =$

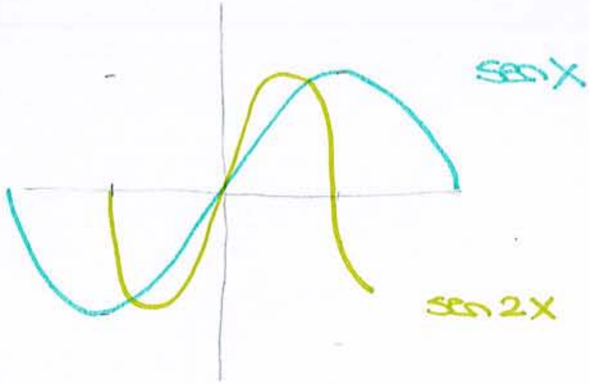
$= 0\cdot |x| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Intervalo $(-\infty, \infty) =$ campo

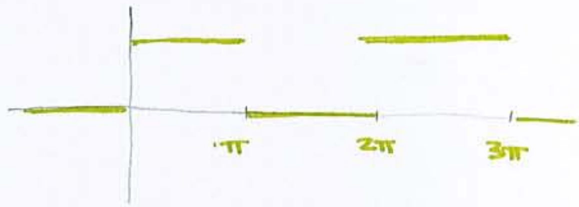
$\boxed{\rho = \infty}$ → Radio

Aproximación de series de senos y cosenos (SERIES DE FOURIER).





Ejemplo: la siguiente función nos interesa aproximarla a series de senos y cosenos:



→ si $f(x)$ es función periódica en $[-\pi, \pi]$ de periodo 2π entonces puede aproximarse mediante la serie de funciones

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

donde: a_n, b_n coeficientes de FOURIER.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

y converge en todo pto en donde f es continua.

F es función par

$(f(x) = f(-x))$

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \end{cases}$$

F es función impar

$(f(x) = -f(-x))$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx\,dx \end{cases}$$

Ejplo: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

Esto siempre es 0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$$

por eso aquí no se pone

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi}$$

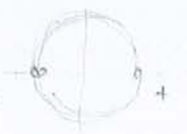
$$= \frac{1}{n\pi}(\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen} 0) = 0 \longrightarrow \boxed{a_n = 0}$$

Esto siempre vale 0

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\left(\underbrace{-\cos n\pi}_{\text{Esto cambia}} + \cos 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} n \text{ par} = 0 \\ n \text{ impar} = 2/\pi n \end{cases}$$



$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Entonces:

$$\boxed{f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)}\operatorname{sen}(2n+1)x}$$

Problema (parecido) 20.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (-\pi, 0) \\ -1 & \text{si } (0, \pi) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} -1\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[(x]_{-\pi}^{0} + (-x]_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[+\pi - \pi\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} -\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{n}(-\operatorname{sen} nx)\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen} n\pi\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{0}^{\pi} -\operatorname{sen} nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\cos 0 + \cos n\overset{(-\pi)}{\pi} + \cos n\pi - \cos 0\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(-2\cos 0 + 2\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-1 + \cos n\pi\right) = \begin{cases} n \text{ par} = 0 \\ n \text{ impar} = \dfrac{-4}{n\pi} \end{cases}$$

$\cos \pi = -1$ $\quad \frac{2\pi}{\pi n}(\cancel{-1}+1)$ 0

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)\pi}\operatorname{sen}(2n+1)x}$$

porque hay que pasarlo para impar.

T3.9

calculos cuánto vale ?

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)x =$$

si $x = \pi/2$

$$= \frac{-4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)x = \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$= \frac{-4}{\pi} \sum \frac{1}{2n+1} (-1)^n = \frac{-4}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = -1$$

Despejo:

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Teorema: si f es una función par (es decir $f(x) = f(-x)$)

entonces siempre $\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx . \end{cases}$

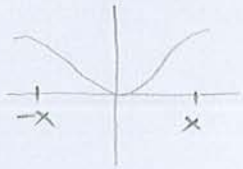
y si f es una función impar (es decir $f(x) = -f(-x)$)

entonces siempre

$a_0 = 0$ y $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

Función par



Función impar:

en el problema de antes al ser impar no hace falta hacerlo todo.

T3.10

RESUMEN TEMA 3: SERIES

Definición de límite:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Límite:

converge $\rightarrow \{a_n\} = l$ único

Diverge $\left| \begin{array}{l} \{a_n\} = \{1, 0, 1, 0 \ldots\} \\ \{a_n\} = \infty \end{array} \right.$

Si $\sum a_n$ converge entonces necesariamente $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Serie Armónica:

serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Diverge

Serie Geométrica:

serie $\sum_1^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$

Criterio condensación:

$\sum a_n \longleftrightarrow \sum 2^n a_{2^n}$

Criterio comparación:

$a_n \leq b_n$

$\sum b_n$ converge $\rightarrow \sum a_n$ converge

$\sum a_n$ diverge $\rightarrow \sum b_n$ diverge

→ Hay que tocar algo para hacer mayores

mayor convergente
menor divergente

Tabla de Infinitos

$n^n > n! > k^n > a^n > \ln n$ con $k > 1$, $a > 0$

Comparación por paso al límite:

Dados $\sum a_n$, $\sum b_n$

si $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = N$ $(\neq 0, \neq \infty)$ → Tienen el mismo carácter.

Criterio del cociente.

si $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$L < 1$ converge
$L > 1$ Diverge
$L = 1$?

Criterio de RAABE (cuando no sirve el del cociente)

$\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

$L > 1$ converge
$L < 1$ Diverge
$L = 1$?

Criterio de la Raíz.

$\lim \sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{1/n}$ L<1 converge
L>1 Diverge
L=1 ?

Criterio del Logaritmo (cuando no Raíz)

$\lim \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$ L>1 converge
L<1 Diverge
L=1 ?

Criterio de Leibnitz.

$\sum (-1)^{n+1} a_n \rightarrow$ converge

Definición:

$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ Es condicional convergente.
Suma lo mismo para cualquier reord.

$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ Es absolutamente convergente
$\forall s \ \exists$ reordenación . $\sum b_n = S$

Teorema.

Dado $\sum (-1)^{n+1} a_n$ con $a_n > 0$

$|E_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$

suma Real ← suma de los n primeros

Serie de Funciones

$\{f_n\} = \{f_1, f_2 \dots f_n, \dots\}$ todos en un dominio D

Límite puntual.

Dado $\{f_n\}$, f es límite puntual si: $\forall x \in D \ \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

Serie funcional de potencias.

Centrados en 0
$\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$

Series de FOURIER (Aprox. de series de senos y cosenos)

$f(x) \sim a_0 + \sum a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx$

Escuela Politécnica Superior de Málaga. CÁLCULO

2. Series numericas y funcionales.

1. Describe la sucesión $\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ de sumas parciales para las series $\sum_1^\infty a_n$ siguientes, y encuentra una expresión como término general para ellas:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$

2. Prueba que la sucesión de sumas parciales de la serie *geométrica* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$, tiene por término general $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, y halla los valores de r para los que la serie converge. Suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{3n}}{9^n}$.

3. Prueba que la serie *armónica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.

4. Aplica el criterio de condensación de Cauchy para estudiar el carácter de las serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, según los valores de p.

5. Usa el criterio de condensación de Cauchy para probar que la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge.

6. Por comparación con otras series con caracteres ya conocidos, estudia el carácter de las series:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 5}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{n^2 + 1}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^3 + n^2 + 1}$

7. Con el criterio del cociente estudia el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p r^n$ para $r, p \in \mathbb{R}$.

8. $\{n^n\} > \{n!\} > \{k^n\} > \{n^p\} > \{\ln n\}$ $(k > 1, p > 0)$ son sucesiones que tienden a infinito, ordenadas por orden de infinitud. Para cualesquiera dos $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ de ellas, utiliza el criterio del cociente para estudiar el carácter de $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ según los valores de k y p.

9. Aplica el criterio de Raabe para estudiar el carácter de las series:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$

10. Aplica el criterio de la raíz para estudiar el carácter de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5000}{\sqrt{n}}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-n}$

11. Usa el criterio asintótico para estudiar el carácter de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^2}}-1$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+3}{n}$

12. Determina el carácter de las siguientes series numéricas:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ b) $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\cdots$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\operatorname{sen}^3 n}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$ f) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots$

g) $\frac{2}{5}+\frac{2^2+1}{2\cdot 5^2}+\frac{3^2+1}{3\cdot 5^3}+\cdots$ h) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\cdots$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 5^n}$ k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(3n+2)\cdot n^{4/3}}$ l) $\frac{6}{2\sqrt{2}-3}+\frac{7}{3\sqrt{3}-3}+\cdots$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+5}{n^3+2n}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n+2}$ q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4 n}{n^2}$ r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^a}{n!}$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}$ t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n-4}\right)^n$ u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{n!}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$ w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$ x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

13. Estudia la convergencia de las siguientes series. En su caso indicar si la convergencia es absoluta o condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ c) $1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ f) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$

14. Estima la suma de las siguientes series, con dos cifras exactas.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ b) $1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots$

15. En cada caso dibuja las sucesiones de funciones $\{f_n\}$, $n=1,2,\cdots$, y determina el límite puntual.

(a) $f_n(x)=(1-\frac{1}{n})x$, para todo x de R

(b) $f_n(x)=\begin{cases} x^n & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1/n \\ nx & \text{si} \quad -1/n \leq x < 1/n \\ 1 & \text{si} \quad 1/n \leq x \end{cases}$

16. Determina el campo de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

d) $1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5^2}x^2 \cdots$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} x^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} x^n$

17. Para los valores de x donde es posible, representa mediante una serie de potencias centrada en cero las siguientes funciones:

a) e^x b) $\frac{1}{1-x}$ c) $\operatorname{arctg} x$ d) $\frac{1}{1+x^2}$ e) $\frac{x}{2-3x}$ f) $\frac{x^2+1}{x-1}$

18. Calcula la suma de las series de potencias para los valores de x posibles.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n x^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+n) x^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

19. Para la función *seno hiperbólico*, $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

a) Calcula su serie de Taylor centrada en 0 y su campo de convergencia.

b) Suma la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4^n (2n+1)!}$.

20. Desarrolla en serie de Fourier la función periódica de periodo 2π definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Aplica dicho desarrollo para sumar la serie $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$

21. Desarrolla en serie de Fourier la función de periodo 2π dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{si} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Utiliza dicho desarrollo para deducir la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$

Escuela Politécnica Superior de Málaga. CÁLCULO

2. Series numericas y funcionales.

1. Describe la sucesión $\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ de sumas parciales para las series $\sum_1^\infty a_n$ siguientes, y encuentra una expresión como término general para ellas:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

2. Prueba que la sucesión de sumas parciales de la serie *geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, tiene por término general $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, y halla los valores de r para los que la serie converge. Suma $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{3n}}{9^n}$.

3. Prueba que la serie *armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.

4. Aplica el criterio de condensación de Cauchy para estudiar el carácter de las serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, según los valores de p.

5. Usa el criterio de condensación de Cauchy para probar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge.

6. Por comparación con otras series con caracteres ya conocidos, estudia el carácter de las series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{n^2 + 1}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^3 + n^2 + 1}$

7. Con el criterio del cociente estudia el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$ para $r, p \in \mathbb{R}$.

8. $\{n^n\} > \{n!\} > \{k^n\} > \{n^p\} > \{\ln n\}$ $(k > 1, p > 0)$ son sucesiones que tienden a infinito, ordenadas por orden de infinitud. Para cualesquiera dos $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ de ellas, utiliza el criterio del cociente para estudiar el carácter de $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ según los valores de k y p.

9. Aplica el criterio de Raabe para estudiar el carácter de las series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$

10. Aplica el criterio de la raíz para estudiar el carácter de las series:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5000}{\sqrt{n}}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-n}$

11. Usa el criterio asintótico para estudiar el carácter de las series:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2}} - 1$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n+3}{n}$

12. Determina el carácter de las siguientes series numéricas:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ b) $1 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{3^3}{3!} + \dfrac{4^4}{4!} + \cdots$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 + \operatorname{sen}^3 n}{n^n}$

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{7n+4}\right)^{4n-2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)^3}$ f) $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{2}{3 \cdot 4} + \cdots$

    g) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2^2+1}{2 \cdot 5^2} + \dfrac{3^2+1}{3 \cdot 5^3} + \cdots$ h) $1 + \dfrac{2!}{2^2} + \dfrac{3!}{3^3} + \dfrac{4!}{4^4} + \cdots$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$

    j) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n \cdot 5^n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{(3n+2) \cdot n^{4/3}}$ l) $\dfrac{6}{2\sqrt{2} - 3} + \dfrac{7}{3\sqrt{3} - 3} + \cdots$

    m) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2 - n + 5}{n^3 + 2n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ o) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

    p) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n+2}$ q) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^4 n}{n^2}$ r) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n^a}{n!}$

    s) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n}$ t) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \dfrac{n+1}{n-4}\right)^n$ u) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^a}{n!}$

    v) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(2n+1)^n}$ w) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1}$ x) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

13. Estudia la convergencia de las siguientes series. En su caso indicar si la convergencia es absoluta o condicional.

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ c) $1 + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} - \dfrac{1}{5^2} + \cdots$

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \ln n}$ f) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \cdots$

14. Estima la suma de las siguientes series, con dos cifras exactas.

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(2n-1)!}$ b) $1 + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} - \dfrac{1}{5^2} + \cdots$

15. En cada caso dibuja las sucesiones de funciones $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$, y determina el límite puntual.

    (a) $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})x$, para todo x de R

    (b) $f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1/n \\ nx & \text{si} \quad -1/n \leq x < 1/n \\ 1 & \text{si} \quad 1/n \leq x \end{cases}$

16. Determina el campo de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

d) $1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5^2}x^2 \cdots$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} x^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^n$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n} x^n$

17. Para los valores de x donde es posible, representa mediante una serie de potencias centrada en cero las siguientes funciones:

a) e^x b) $\dfrac{1}{1-x}$ c) $\operatorname{arctg} x$ d) $\dfrac{1}{1+x^2}$ e) $\dfrac{x}{2-3x}$ f) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$

18. Calcula la suma de las series de potencias para los valores de x posibles.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+n) x^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

19. Para la función *seno hiperbólico*, $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

a) Calcula su serie de Taylor centrada en 0 y su campo de convergencia.

b) Suma la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)!}$.

20. Desarrolla en serie de Fourier la función periódica de periodo 2π definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Aplica dicho desarrollo para sumar la serie $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$

21. Desarrolla en serie de Fourier la función de periodo 2π dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{si} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Utiliza dicho desarrollo para deducir la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$