

TEMA 4.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

DOMINIOS:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{Dom } f = [-2, \infty)$$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Problema 1.

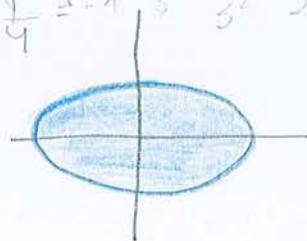
a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

b) $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0\}$$

$$1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0 \rightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1} \quad \text{Elipse}$$

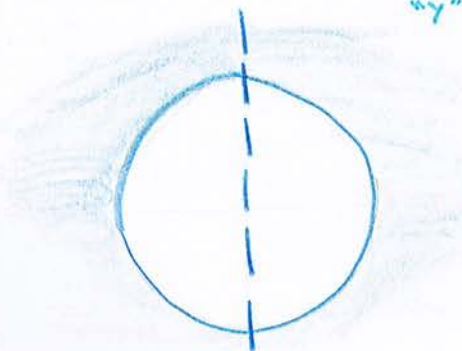


c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2-9 \geq 0\} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$x^2+y^2-9=0$$

$$x^2+y^2=3^2$$



TEMA 4.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

DOMINIOS:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{Dom } f = [-2, \infty)$$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Problema 1.

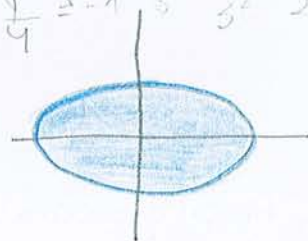
a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

b) $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 + 9y^2}$

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 36 - 4x^2 + 9y^2 \geq 0\}$$

$$1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0 \rightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = -1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1} \quad \text{Elipse}$$

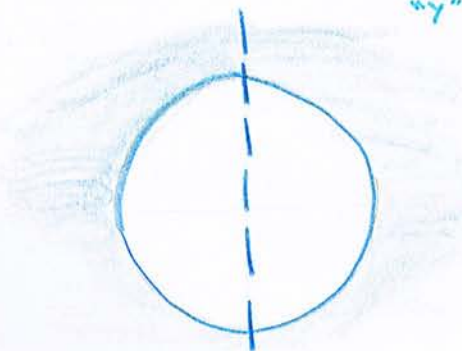


c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

$$\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2-9 \geq 0\} \quad \text{and } x \neq 0$$

$$x^2+y^2-9=0$$

$$x^2+y^2=3^2$$

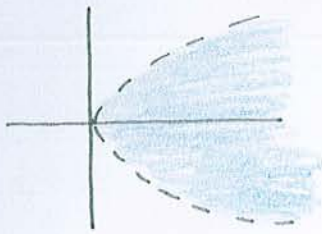


$$d) f(x,y) = \frac{x^2 y}{5\sqrt{x-y^2}}$$

$$\text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x-y^2 > 0\}$$

$$x-y^2 = 0$$

$$x = y^2$$



$$e) f(x,y) = \arcsin(x+y)$$

NOTA:

$$\sin \alpha = N^\circ$$

$$\arcsin N^\circ = \alpha$$

$$\text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x+y \leq 1\}$$

$$-1 \leq x+y$$

\wedge

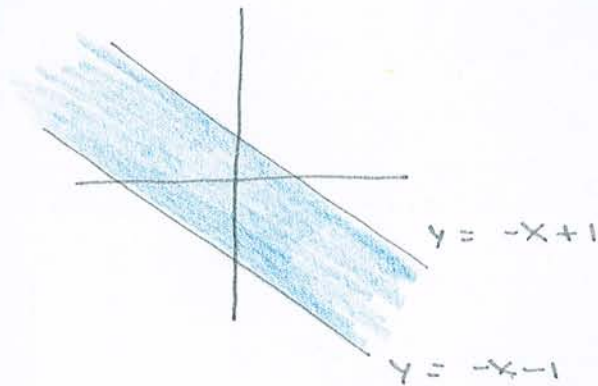
$$x+y \leq 1$$

$$-1 = x+y$$

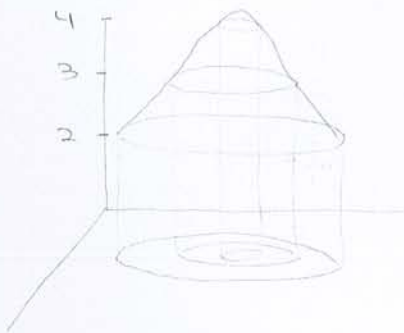
$$x+y = 1$$

$$y = -x - 1$$

$$y = -x + 1$$



Representación de f , con curvas de nivel.



Problema 2.

a) $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$

Nivel 0 ; $f(x,y) = 0 = 25 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 = 5^2$

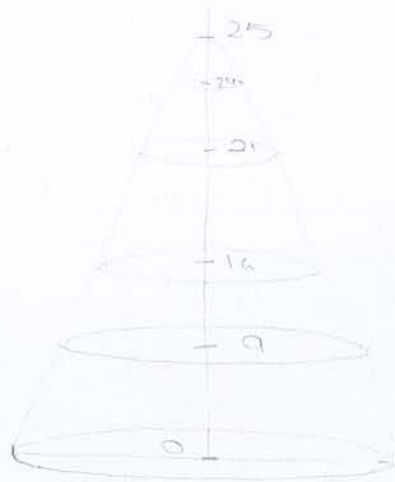
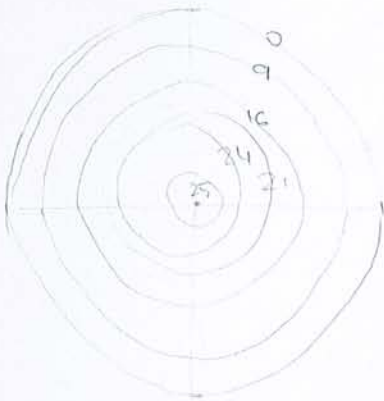
Nivel 9 ; $f(x,y) = 9 = 25 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 = 4^2$

Nivel 16 ; $f(x,y) = 16 = 25 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 = 3^2$

Nivel 21 ; $f(x,y) = 21 = \rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$

Nivel 24 ; $f(x,y) = 24 = \rightarrow x^2 + y^2 = 1^2$

Nivel 25 ; $f(x,y) = 25 = \rightarrow x^2 + y^2 = 0^2$



Parábola de Revolución.

c) $f(x,y) = xy$

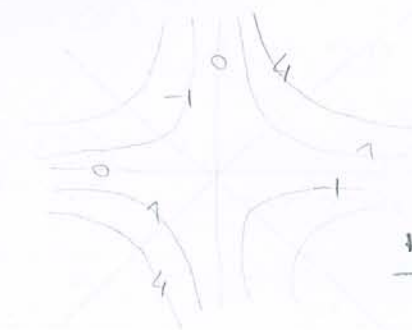
Nivel 0 ; $x \cdot y = 0$

Nivel 1 ; $x \cdot y = 1; y = \frac{1}{x}$

Nivel 4 ; $x \cdot y = 4; y = \frac{4}{x}$

Nivel -1 ; $x \cdot y = -1$

...



Hiperbolas

Pto de silla:



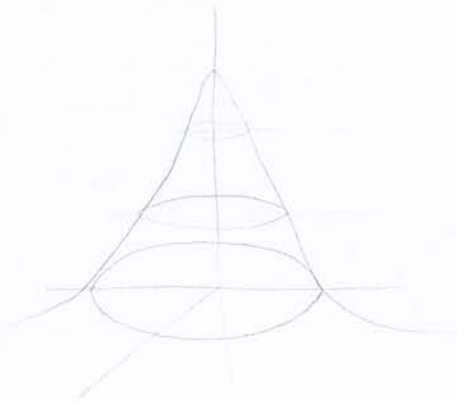
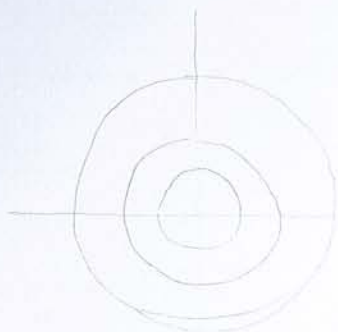
$$e) f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$0 = e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{no hay.}$$

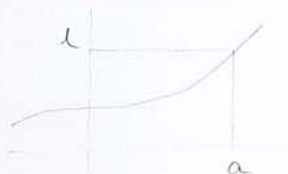
$$e^0 = e^{-(x^2+y^2)} \rightarrow 0 = -(x^2+y^2)$$

$$e^{-1} = e^{-(x^2+y^2)} \rightarrow 1 = x^2+y^2$$

$$e^{-4} = e^{-(x^2+y^2)} \rightarrow 2^2 = x^2+y^2$$



• límites en funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



El límite es único en cada pto.

Problema 3.

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} = 1 - (-1) = 2$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x+y+1} - 1}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt{x+y+1} - 1)(\sqrt{x+y+1} + 1)}{(x^2-y^2)(\sqrt{x+y+1} + 1)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt{x+y+1})^2 - 1^2}{(x+y)(x-y)(\sqrt{x+y+1} + 1)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{(x+y)(\sqrt{x+y+1} + 1)} = \pm \infty$$

Ejemplo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$

Problema 4a

Si $y=x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Si $y=-x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1$$

Al dar el límite valores distintos se demuestra que no existe.

Nóloga 29-11-10

+ **Calculo de límites.**

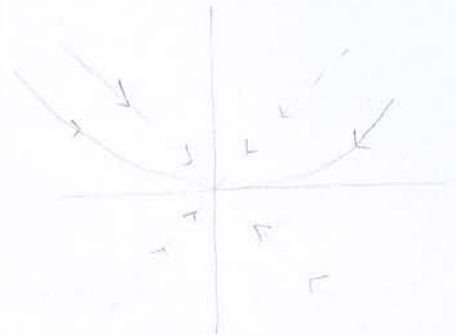
- 1) Simplificación y sustitución
- 2) Intentar probar que no existe.

En el ejemplo del día anterior: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$= \lim_{y=-x} \frac{x}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x} = -1$$

$$= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \pm \infty$$



Esto es lo que se lea como límite según una trayectoria.

Problema 4.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{-y^2} = 0$$

entonces cuando los límites sean iguales...

$$\dots$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xmx}{x^2-(mx)^2} = \frac{m}{1-m^2}$$

no \exists lim
pq depende de m.

Problema 6.

$$a) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2+x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$$

$$y=-x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4}{x^2+x^6} = 0$$

$$\boxed{y=mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^3x^3}{x^2+m^6x^6} = 0$$

quando esse igual tb teremos que fazer...

$$\dots$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$x = y^3$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \quad \nexists \text{ lim}$$

$$b) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

$$y=-x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x^2+1} = 0$$

$$2x=y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2}{y^2+y^2} = 1 \quad \nexists \text{ lim}$$

$$f) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \rightarrow y}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x^2} = 0$$

$$y = x^2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^4}{x^2 + x^4} = 1$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = 0$$

en este todas salen 0.

entonces habrá que:

3) Intentar probar que existe.

TEOREMA. ACOTACIÓN.

Si $f(x,y) = h(x,y) \cdot g(x,y)$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0$

^ $g(x,y)$ está acotada.

$$\exists k / |g(x,y)| < k.$$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_0 \text{ acotado.}$ Esto por el teorema es $0 \cdot \text{acot} = 0$

en el problema 6.e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = xy \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

\exists límite.

esta acotada para
valorá entre 0 y 1.

→ Para que esté acotado tengo que tener lo mismo arriba que abajo.

si el limite no tiende a (0,0).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x+a, y+b)$$

esto lo hago para centrarlo en (0,0)

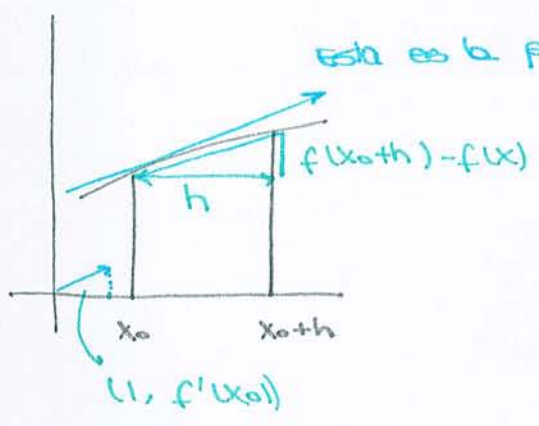
Problema 4c.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - y - 1}{y^2 - x + 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x+1)^2 - y - 1}{y^2 - (x+1) + 1} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 + 2x - y}{y^2 - x}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 + 2y^2 - y}{0} = \pm \infty \quad \Delta \text{ lim}$$

Derivadas en \mathbb{R}^2 .



esta es la pendiente

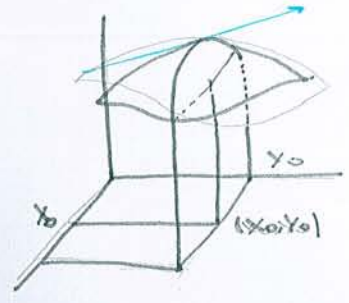
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{f'(x_0)}$$

$$(x-x_0) f'(x_0) = y-y_0$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0)$$

Ahora en \mathbb{R}^3 .



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Def. de derivada parcial en x

$$\left(1, 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Deriv. parcial en y.

Problema 8.

a) $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 5y - 14x + 3$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5x - 2y$$

b) $f(x, y) = e^{xy} \cos y^x$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = ye^{xy} \cos y^x + e^{xy} (-\sin y^x) y^x \ln y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^{xy} \cos y^x + e^{xy} (-\sin y^x) x(y)^{x-1}$$

c) $f(x, y) = \frac{y}{\arctan \frac{y}{x}} = y \left(\arctan \frac{y}{x} \right)^{-1}$

$$\frac{\arctan \left(\frac{y}{x} \right) - y \left(\frac{1/x}{\sqrt{1 - (y/x)^2}} \right)}{\left(\arctan \frac{y}{x} \right)^2}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y(-1) \left(\arctan \frac{y}{x} \right)^{-2} \frac{-\frac{y}{x}}{\sqrt{1 - (y/x)^2}}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\arctan \frac{y}{x} - y \left(\frac{y/x}{\sqrt{1 - (y/x)^2}} \right)}{\left(\arctan \frac{y}{x} \right)^2}$$

• Función diferenciable en (x_0, y_0) .

Definición. f es diferenciable en (x_0, y_0) si en el plano

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$



Problema 10.

$$a) f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

① mira la continuidad:

es continua en cada punto $(x,y) \neq (0,0)$

en $(0,0)$ también lo es ya que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)}_0 \cdot \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{Acot}} = 0$$

es continua.

la función al no estar en $(0,0)$ por lo tanto no se aplican las derivadas parciales

② mira si es diferenciable.

es diferenciable en $(x,y) \neq (0,0)$

comprobamos si en $(x,y) = (0,0)$ es diferenciable.

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{df}{dy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2 \operatorname{sen} \frac{1}{k^2} - 0}{k} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2+k^2) \operatorname{sen} \frac{1}{h^2+k^2} - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{h^2+k^2} = 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

RAQUEL SERRANO UEDÓ

→ MUY POSIBLE DE EXAMEN ←

$f(x,y) = \frac{x^n}{x^2+y^2}$. Estudiar según los valores de n .

Estudiamos la continuidad según los valores.

$n=0$ $\lim \frac{x^0}{x^2+y^2} \rightarrow$ no continua ni diferenciable

$n=1$ $\lim \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow$ no cont. ni dif.

$n=2$ $\lim \frac{x^2}{x^2+y^2} \rightarrow$ no cont. ni dif.

$n \geq 3$ $\lim \frac{x^3}{x^2+y^2} \rightarrow$ si es continua, por lo

que vamos si es diferenciable.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{h^n}{h^3}$$

si $n=3 \rightarrow \lim = 1$

si $n > 3 \rightarrow \lim = 0$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim \frac{0}{k^3} = 0$$

$\forall n \rightarrow \lim = 0$

$n=3$ $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3}{(h^2+k^2)} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{h^3 - (h^2+k^2)h}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{-hk^2}{h^3} = \infty$

→ no diferenciable.

$n > 3$ $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^n}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{h^n}{\sqrt{(h^2+k^2) + h^2+k^2}} = \lim \frac{h^n}{h^3+\dots} = 0$

→ si diferenciable.

sera continua y diferenciable para $n > 3$

Problema 10 → Muy posible de examen.

b) $f(x,y) = \frac{x^n}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ según los valores de n .

veremos la continuidad según los valores:

$n=0$ no continua, por lo que no diferenciable.

$n=1$ $\lim \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow$ no continua, ni diferenciable.

$n=2$ $\lim \frac{x^2}{x^2+y^2} \rightarrow$ no continua, ni diferenciable.

$n \geq 3$ si es continua, por lo que veremos si es diferenciable.

se sobre entiende que $f(0,0)$ es 0.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^n}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{n-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{n-3}}{1}$$

si $n=3$ el lim es 1.

si $n > 3$ el lim es 0.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = 0$$

En el lim es 0.

para $n=3$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^3 - h(h^2+k^2)}{h^2+k^2 \sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-hk^2}{h^3} = \infty$$

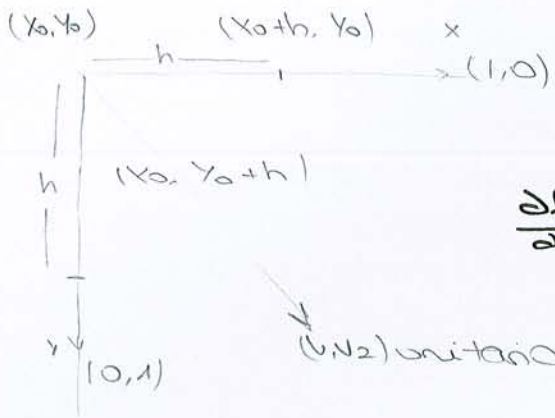
→ no diferenciable

para $n > 3$

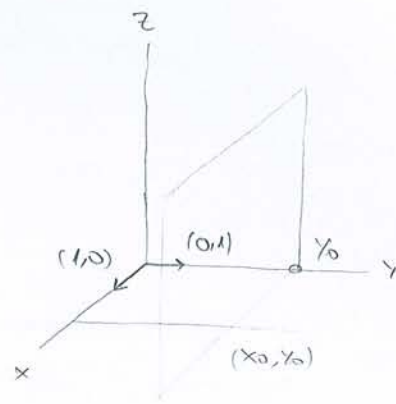
$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^n}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^n}{(h^2+k^2) \cdot \sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^n}{\sqrt{(h^2+k^2)^2 \cdot (h^2+k^2)}} \leq \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^n}{h^{3+..}} = 0$$

→ si diferenciable.



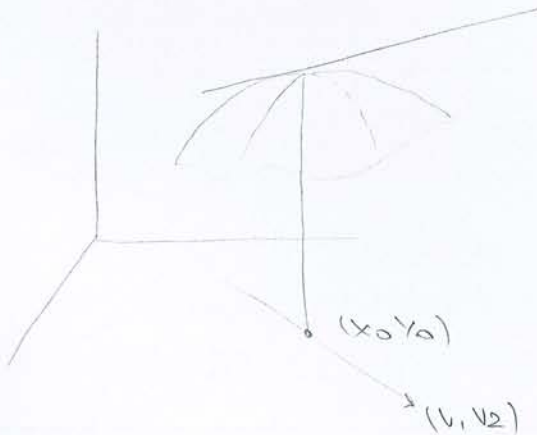
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Definición Derivada de la función (en cualquier dirección)

Dado (v_1, v_2) vector unitario

$$D_{(v_1, v_2)} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0) + h(v_1, v_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Ejemplo: En la dirección $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, y en el pto $(0,3)$

$$f(x, y) = xy^2 + y$$

↳ como no mide una $\rightarrow \sqrt{3^2+4^2} = 5$ entonces $\rightarrow (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,3) + h(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) - f(0,3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{3}{5}h, 3 + \frac{4}{5}h) - f(0,3)}{h} =$$

→ Da b alguna
forma que
para $f(0,3)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3/5 h)(3 + 4/5 h)^2 + (3 + 4/5 h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3/5 h (9 + 24/5 h + 16/25 h^2) + 4/5 h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{5} (9 + \frac{24}{5} h + \frac{16}{25} h^2) + \frac{4}{5} = \frac{31}{5}$$

Teorema: Si (v_1, v_2) es unitaria, entonces

$$Df(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Entonces: $f = xy^2 + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) = y^2 = 9$$

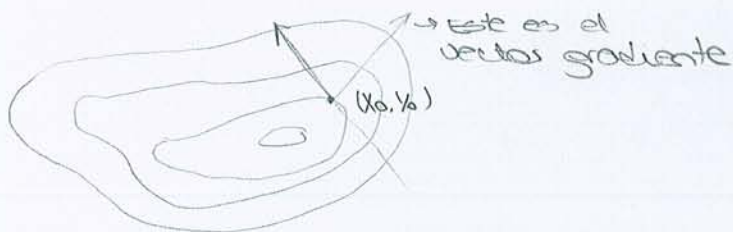
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = 2xy + 1 = 1$$

$$Df(0,3) = \frac{3}{5} \cdot 9 + \frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{31}{5}$$

(3/5, 4/5)

*mucho más
fácil*

GRADIENTE



Ya sabemos que:

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= (v_1, v_2) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) =$$

$$= \underbrace{\|(v_1, v_2)\|}_1 \cdot \underbrace{\left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \right\|}_{cte} \cos \theta$$

Entonces será máximo cuando

$$\theta = 0^\circ \text{ para que el } \cos \theta = 1.$$



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

esto es
lo q
me hace
q varie

Definición: Gradiente.

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

la derivada en la dirección del gradiente es

$$D_{\frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}} f(x_0, y_0) = \|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\|$$

Problema 14.

$$f(x, y) = 4000 - 0'0001x^2 - 0'004y^2$$

$$\text{pto} \equiv \left(\underset{x_0}{500}, \underset{y_0}{300}, \underset{f(x_0, y_0)}{3390} \right)$$

$$\vec{\nabla} f(500, 300) = (-0'0002x, -0'008y) =$$

$$= (-0'01, -0'24) \Rightarrow \text{esto es la dirección q toma.}$$

La pendiente es el módulo de $\vec{\nabla} f$.

$$\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{(0'01)^2 + (-0'24)^2} = 0'24$$

Donde derivada direccional es 0 y se da en

$$(0'24, -0'01)$$

Problema 15.

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2 \quad T = -5$$

pto (2, -3)

$$\vec{\nabla} f(2, -3) = (-8x - 2y) = (-16, 6)$$

$$\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{(-16)^2 + (6)^2} = 17$$

Eplo: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

prob. 16

Para encontrar un pto
 $y = 1$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

s. la curva de nivel 0 \rightarrow entonces tenemos la

elipse $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

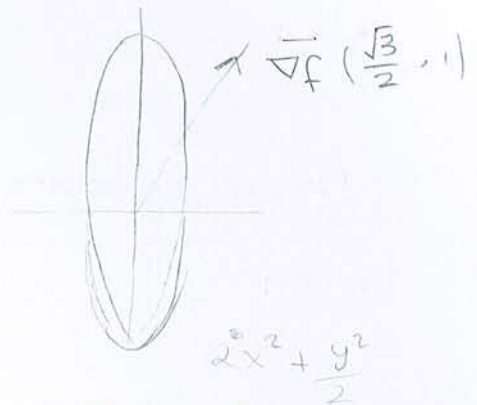
$$\vec{\nabla} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) = (2x, \frac{y}{2}) = (\sqrt{3}, \frac{1}{2})$$

la recta normal:

$$\frac{x - \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{y - 1}{1/2} \equiv r_n$$

vector tangente:

$$(1/2, -\sqrt{3})$$



Ahora vamos a pasar de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que era lo que estábamos viendo a

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

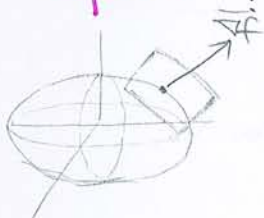
y pasamos de tener curvas de nivel a tener superficies de nivel.

eplo: $f(x, y, z) = x^2 y + z$

En nivel 0 \rightarrow tendremos superficies de nivel.

Ahora nuestro vector gradiente va a tener 3 coord.

eplo: $f(x, y, z) = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1 \rightarrow$ Elipsoide.



$$x = 0$$

$$y = 1/2$$

$$z = \sqrt{3} \rightarrow z^2/4 = 3/4$$

Resolución del problema:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

$$\nabla f(0, 1/2, \sqrt{3}) = (2x, 2y, z/2) = (0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

La Recta es:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-1/2}{1} = \frac{z-\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = r$$

El producto escalar de:

$$(x-0, y-1/2, z-\sqrt{3}) \cdot (0, 1, \sqrt{3}/2) = 0$$

entonces:

$$\boxed{0x + 1y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0} \text{ Plano.}$$

Problema 17

$$xyz - 4xz^3 + y^3 - 10 = 0$$

$$\text{pto } (-1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f (-1, 2, 1) &= (yz - 4z^3, xz + 3y^2, xy - 12xz^2) = \\ &= \overrightarrow{(-2, 11, 10)}\end{aligned}$$

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-1}{10} \rightarrow \text{Recta normal.}$$

$$-2(x+1) + (y-2)11 + 10(z-1) = 0 \rightarrow \text{Plano.}$$

Nólogo 9-12-10

Regla de la Cadena.

$$x \mapsto x^2 \mapsto \text{sen}(x^2)$$

$$(\text{sen}(x^2))' = [\cos(x^2)] \cdot 2x$$

Teorema: Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

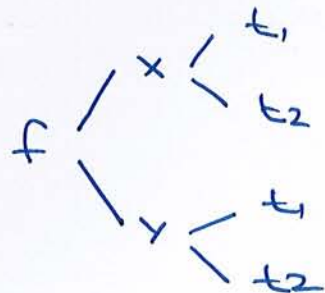
$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t_1, t_2) \mapsto x(t_1, t_2)$$

$$y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t_1, t_2) \mapsto y(t_1, t_2)$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = f(x(t_1, t_2), y(t_1, t_2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2}$$



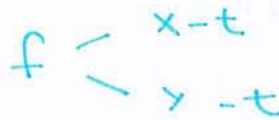
Problema 20.

$$f(x,y) = x^2y - y^2$$

Hallar $\frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $t=0$.

donde $x = \cos t$

$$y = e^t$$



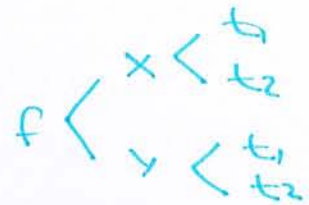
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= (2xy) \cos t + (x^2 - 2y) e^t$$

Ejemplo: $f(x,y) = x^2y - \frac{1}{x}$

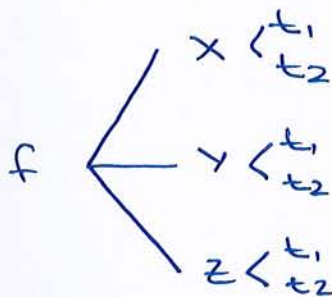
donde: $x = t_1 e^{t_2}$

$$y = t_1 t_2^2$$



$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = (2xy + \frac{1}{x^2}) e^{t_2} + x^2 t_2^2$$

* Si hay 3 vbles:



$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_2}$$

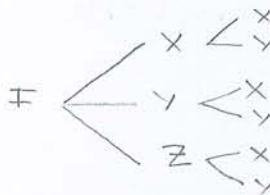
* Funciones Implícitas.

Lo va a dar mediante el p. 24.

Problema 24.

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ siendo $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0 = g(x,y)$
 $g(x,y) = F(x,y,z) = 0$

$3x^2 f(x,y) - x^2 y^2 + 2(f(x,y))^3 + 3y f(x,y) - 5 = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 =$  por lo que:

$= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Esto es el Teorema de la Función Implícita.

$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$

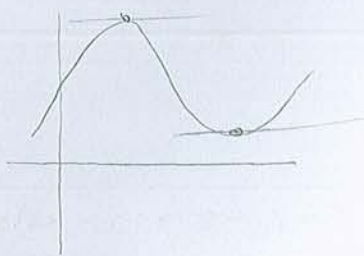
$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{-2x^2y + 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$

Solución

$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$
 $\frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$

$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
 $\frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

* Extremos en funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



Definición: Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(x_0, y_0) es Máximo (Relativo)

si existe entorno de radio ρ tal que para (x, y) de ese entorno:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

si es mínimo \geq

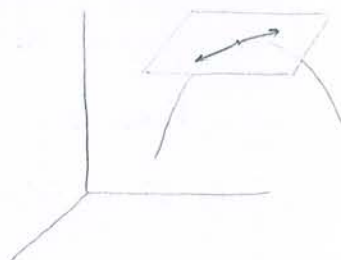


eplo: Máximo $f: (x, y) = 1 - x^2 - y^2$ presenta máximo $(0, 0)$

evidente: $f(h, k) = 1 - h^2 - k^2 \leq 1 = f(0, 0)$

Teorema: Si f presenta un extremo local (máximo o mínimo relativo) y f admite $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y son continuas en (x_0, y_0) entonces: \rightarrow Ptas críticas

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

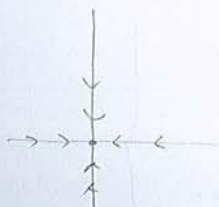


Pero el recíproco no es cierto.

eplo: $f(x, y) = y^2 - x^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \rightarrow x_0 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \rightarrow y_0 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \right.$$

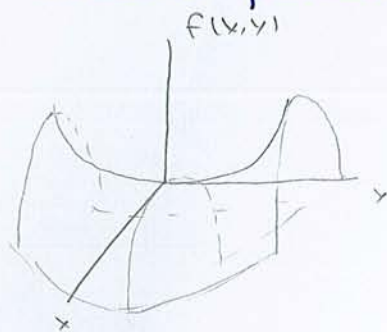
Pero no es ni max ni min. (Se demuestra q el Recíproco no es cierto).



$$f(h, 0) = -h^2 < 0 = f(0, 0)$$

$$f(0, k) = k^2 > 0 = f(0, 0)$$

¿cómo podemos dibujarlo?



pto de silla.

- Para el plano $x=0$
 $f(x,y) = y^2$

- Para el plano $y=0$
 $f(x,y) = -x^2$

Teorema: Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

continuas en (x_0, y_0) pto crítico. (obtenido de $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$)

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \rightarrow \underline{\text{HESSIANO}}$$

Si:

- ① $g(x,y) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \rightarrow$ Mínimo.
- ② $g(x,y) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \rightarrow$ Máximo.
- ③ $g(x,y) < 0 \rightarrow (x_0, y_0)$ Es Pto de silla.

Ejlo: Problema 26.a

$$f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x + 3y^2 + 4 = 0$$

soluciones:

pto₁ (4, 2)

pto₂ (4/3, 2/3)

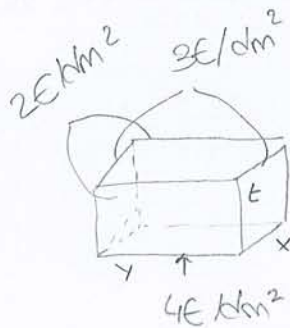
calculamos el HESSIANO para saber si son max. o min.

$$g(4,2) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{vmatrix} = 24 - (-4)(-4) = 8$$

→ ~~es~~ es mínimo. (4,2)

$$g(4/3, 2/3) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{vmatrix} = -8$$

→ ~~es~~ es un pto de silla (4/3, 2/3)



Problema 29.

$$V = 12L$$

$$\text{Fondo } 4E/dm^2$$

$$V = b \cdot a \cdot h$$

$$f(x,y) = 4xy + 2 \cdot 3 \cdot \frac{12}{y} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{12}{x}$$

$$f(x,y) = 4xy + \frac{2^3 \cdot 3^2}{y} + \frac{2^4 \cdot 3}{x}$$

f
↑
coste min

$$xy + 2(xz) + 2(yz) = f(x,y,z)$$

$$xyz = 12 \rightarrow z = \frac{12}{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4y - \frac{24 \cdot 3}{x^2} = 0 \quad \left\{ \quad y = \frac{2^2 \cdot 3}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - \frac{2^3 \cdot 3^2}{y^2} = 0 \quad \left\{ \quad x = \frac{2 \cdot 3}{y^2}$$

$$x - \frac{2 \cdot 3^2}{\frac{2^4 \cdot 3^2}{x^4}} = \frac{x^4}{2^3} \rightarrow 2x^3 - x^4 = x(2^3 - x^3) = 0$$

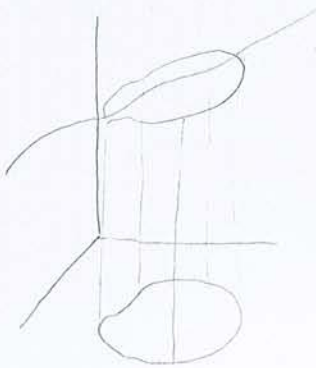
$x = 0 \rightarrow$ No sirve

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Medidas necesarias.

* Extremos con condiciones. Extremos condicionados

"sujetos a".



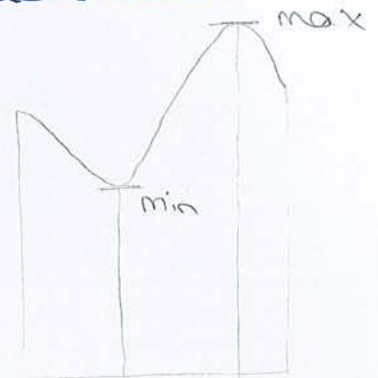
Supongamos que:

la curva de arriba es

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

la curva de abajo es

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow (t, +\sqrt{1-t^2})$$

$$\hookrightarrow (t, -\sqrt{1-t^2})$$

Por lo que:

$$g_1(t) = 1 - t - \sqrt{1-t^2} + 1$$

$$g_2(t) = 1 - t + \sqrt{1-t^2} + 1$$

$$g_1(t) = 2 - t - \sqrt{1-t^2}$$

$$g_1'(t) = -1 - \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = 0 \rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y para $g_2(t)$ tb sale $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Teorema: Si f es diferenciable, y si $g(x,y)=0$ es una curva incluida en el dominio de f . Entonces si (x_0, y_0) es un extremo de f restringido a la curva g , entonces se cumple que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

En el problema anterior:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$(2x-1, 2y-1) = \lambda(2x, 2y)$$

$$\begin{cases} 2x-1 = \lambda \cdot 2x & \textcircled{1} \\ 2y-1 = \lambda \cdot 2y & \textcircled{2} \\ x^2 + y^2 = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = (2x - 2y) = \lambda(2x - 2y)$$

$$1(2x - 2y) - \lambda(2x - 2y) \Rightarrow (1 - \lambda) = 0$$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$2x - 2y \rightarrow \boxed{x = y} \text{ Sustituimos en } \textcircled{3}$$

$$x^2 + x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

entonces tengo:

$$P_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$P_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Para saber cual es el máx ó el mín.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2} \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2} \rightarrow \text{Máximo.}$$

Problema 23. b)

$$f(x, y) = 3x^2 + y^3 \quad \text{sueto a } x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$(6x, 3y^2) = \lambda(2x, 2y)$$

$$\begin{cases} 6x = \lambda 2x \\ 3y^2 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_1 & (0, 3) \\ P_2 & (0, -3) \\ P_3 & (3, 0) \\ P_4 & (-3, 0) \\ P_5 & (\sqrt{5}, 2) \\ P_6 & (-\sqrt{5}, 2) \end{aligned}$$

$$* \quad 6x - \lambda 2x = x(6 - 2\lambda) = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 3}$$

$$\rightarrow x = 0 ; y = \pm 3$$

$$3y^2 = \lambda 2y$$

$$3y^2 - \lambda 2y = y(3y - \lambda 2) = 0$$

$$y(3y - 6) = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$\rightarrow y = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

candidatos:

$$f(0, 3) = 27$$

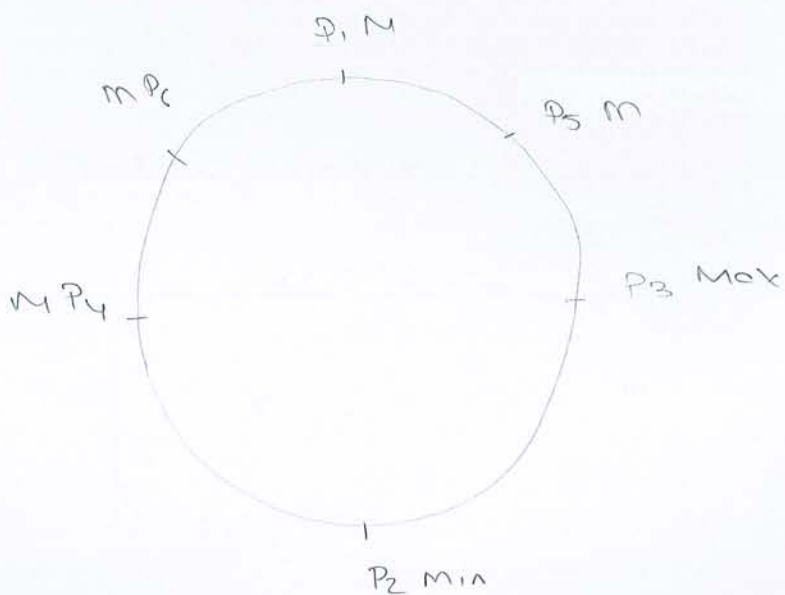
$$f(0, -3) = -27$$

$$f(3, 0) = 27$$

$$f(-3, 0) = 27$$

$$f(\sqrt{5}, 2) = 15 + 8 = 23$$

$$f(-\sqrt{5}, 2) = 23$$



Problema 33.

f) $f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeto a: $y - x^2 = 0$

$y - x^2 = 0$

$(2x, -2y) = \lambda(-2x, 1)$

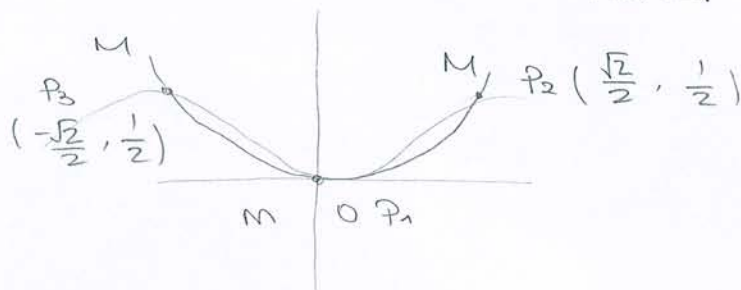
$$\begin{cases} 2x = -2x\lambda \rightarrow 1 \cdot 2x + \lambda 2x = 0 = \\ -2y = \lambda \rightarrow -2y = \lambda \rightarrow \boxed{y = 1/2} \rightarrow x = \pm \sqrt{1/2} \\ y = x^2 \end{cases}$$

$= 0 = (1+\lambda)2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$
 $\lambda = -1$

$P_1 = (0,0)$

$P_2 (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

$P_3 (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$



$P_1) f(0,0) = 0$

$P_2) f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$P_3) f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Para saber si P_3 y P_2 son máx o no cojo un pto un poco más grande para comprobarlo.

Lagrangiana.

$L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(y - x^2)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0$

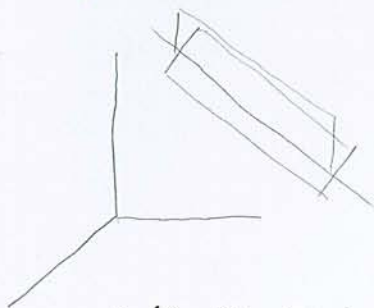
$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(y - x^2) = 0$

Problema 24.

Hallar el pto de rec5 inter.

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-2z=4 \end{cases}$$



$$\text{distancia} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{omitimos la raíz})$$

por eso esta pñ nos pide la dist. min

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x-y-2) - \mu(x-2z-4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -2y \quad \text{subituyo}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2\mu = 0 \rightarrow \mu = -z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x + y + 2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -x + 2z + 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x - y = 2 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$$

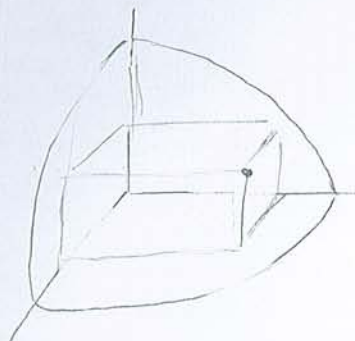
$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Borde} \quad x &= 4/3 \\ y &= -2/3 \\ z &= -4/3 \end{aligned}$$

Problema 35.

$$\text{Elipsoide} \equiv 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

Volumen max? de un paralelepipedo.

Centrado en el 1^{er} cuadr.



$$\text{Volumen} = 8xyz$$

$$(x, y, z) \in \text{Elipsoide}$$

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144)$$

$$x \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 8yz - \lambda 32x = 0$$

$$y \rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = 8xz - \lambda 8y = 0 \quad \rightarrow$$

$$z \rightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = 8xy - \lambda 18z = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -16x^2 - 4y^2 - 9z^2 + 144 = 0$$

$$4xyz = \lambda 16x^2$$

$$4xyz = \lambda 4y^2$$

$$\rightarrow 4xyz = \lambda 9z^2$$

$$\hline 12xyz = \lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2) = \lambda 144$$

$$\boxed{xyz = 12\lambda}$$

$$\rightarrow 4 \cdot 12 \lambda = \lambda 16 x^2$$

$$x^2 = \frac{4 \cdot 12}{16} = 3 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{3}}$$

$$\rightarrow 4 \cdot 12 \lambda = \lambda 4 y^2$$

$$y = \sqrt{12} \rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow 4 \cdot 12 \lambda = \lambda 9 z^2$$

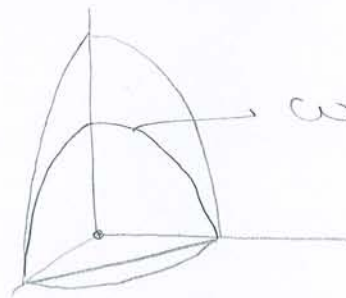
$$z^2 = \frac{4 \cdot 12}{9} \rightarrow \boxed{z = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Problema 36

En el 1º cuadrante

$$x + y = 4$$

$$x^2 + y^2 + 2z = 16$$



curva intersección

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = (x^2 + y^2 + z^2) - \mu(x + y - 4) - \lambda(x^2 + y^2 + 2z - 16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \mu - 2\lambda x = 0 \rightarrow 2x - 0 - 2x = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \mu - 2\lambda y = 0 \rightarrow 2y - \lambda - 2y = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0 \rightarrow \boxed{z = \mu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 4 = 0 \rightarrow x = 4 - y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

(1-2)

min	
$x = 2$	$x = 2 - \sqrt{3}$
$y = 2$	$y = 2 + \sqrt{3}$
$z = 1$	$z = 1$

Maximos

RESUMEN TEMA 4. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

cálculo de límites.

- ① simplificación y sustitución
- ② Intentar probar que \neq .
- ③ Intentar probar que \exists .

Teorema de Acotación.

si $f(x,y) = h(x,y) \cdot g(x,y) / \lim (h(x,y)) = 0 \wedge g(x,y)$ está acotada
 $\exists K / |g(x,y)| < K$.

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 0$

$\lim 0 \cdot \text{acot} = 0 \quad \exists \lim$

si el límite no tiende a $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{x,y \rightarrow (a,b)} f(x+a, y+b)$$

derivadas en \mathbb{R}^3

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Función diferenciable en (x_0, y_0)

f es diferenciable en (x_0, y_0) si:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Derivadas de la función (en cualquier dirección).

dando (v_1, v_2) vector unitario

$$Df(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0) + h(v_1, v_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Teorema:

si (v_1, v_2) es vector unitario, entonces:

$$Df(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Gradiente

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} = (v_1, v_2) \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \|v_1, v_2\| \cdot \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \right\| \cos \theta$$

será máxima cuando

$$\theta = 0^\circ \rightarrow \cos \theta = 1$$

→ la derivada en la dirección del gradiente es:

$$D_f f(x_0, y_0) = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f\|}$$

Deriva de la cadena

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{aligned} \right\} f \begin{cases} x < t_1 \\ y < t_2 \end{cases}$$

Teorema de la Función Implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Extremos:

Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (x_0, y_0) es Máxima (Relativa) si \exists entorno de radio ρ para (x, y) de ese entorno:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{y si es mínimo } \geq).$$

Teorema:

Si f presenta un extremo local $\rightarrow f$ admite $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ \rightarrow son continuas en (x_0, y_0) entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{Pero el recíproco no es cierto}).$$

Teorema:

$$g(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} g(x, y) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 &\rightarrow \text{Min} \\ g(x, y) < 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0 &\rightarrow \text{Max} \\ g(x, y) < 0 &\rightarrow \text{Pto de silla} \end{aligned}$$

Teorema: Lagrange

Si f es diferenciable, \rightarrow si $g(x, y) = 0$ es una curva incluida en el dominio de f . Entonces si (x_0, y_0) es un extremo de f restringido a la curva g . Entonces se cumple que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Escuela Politécnica Superior de Málaga. CÁLCULO



4. Funciones de varias variables.

1. Describe y dibuja en el plano el dominio de las siguientes funciones en el espacio:

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

(c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 9}{x}$

(d) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{5\sqrt{x - y^2}}$

(e) $f(x, y) = \arcsen(x + y)$

(f) $f(x, y) = e^{x/y}$

(g) $f(x, y) = \ln(4 - xy)$

(h) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

(i) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x}$

(j) $\arccos(x^2 - y)$

(k) $f(x, y) = \frac{x + 1}{(x - 1)y}$

(l) $f(x, y) = \log xy$

(m) $f(x, y) = \sqrt{1 - x} - e^{\frac{x}{y}}$

2. Describe las curvas de nivel y haz un esbozo de la gráfica para las siguientes funciones en el espacio:

(a) $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

(b) $f(x, y) = 2x - y + 5$

(c) $f(x, y) = xy$

(d) $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

(e) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

(f) $f(x, y) = x^2 - y + 5$

(g) $f(x, y) = 2^{(x-1)^2 + y^2}$

(h) $f(x, y) = 2^{4x^2 + 9y^2}$

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(j) $f(x, y) = |xy|$

(k) $f(x, y) = y - \sin x$

3. Simplifica y calcula el valor de los límites que siguen:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x + y + 1} - 1}{x^2 - y^2}$

4. Calcula los límites según distintas direcciones para determinar la no existencia de los límites que siguen.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - y - 1}{y^2 - x + 1}$

5. Prueba que los siguientes límites existen:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(y + 1) + y^2}{x^2 + y^2}$

6. Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x + y^2}$

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$

7. Calcula dos vectores directores del plano tangente a la superficie que define la función $f(x, y) = x^2 y - y + 1$ en el punto $(1, 2)$. Calcula su plano tangente. *Entregado*

8. Halla las funciones derivadas parciales $\partial f / \partial x(x, y)$, $\partial z / \partial y(x, y)$ de las siguientes:

(a) $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x$

(b) $f(x, y) = e^{xy} \cos y^x$

~~(c)~~ $f(x, y) = \frac{y}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$

(d) $f(x, y) = e^{x \ln y}$

9. Halla las derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$ en $(0, 1)$

(b) $f(x, y) = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$ en $(1, 0)$

(c) $f(x, y, z) = e^{-\pi z} \cos 4x \sin 6y$ en $(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, 0)$

(d) $f(x, y) = 2^{(x-1)^2 + y^2}$ en $(2, -1)$.

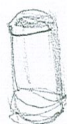
(e) $f(r, s) = \sqrt{ar^2 + \frac{b^2}{s}}$ en (b, a) .

(f) $f(u, w) = ue^w + w \cos u$ en $(-\pi, \pi)$.

10. Estudia la diferenciabilidad de las funciones:

~~(a)~~ $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

~~(b)~~ $f(x, y) = \frac{x^n}{x^2 + y^2}$ en $(0, 0)$ según los valores de n .



Handwritten notes: $MM=2$, $12, 1 \sqrt{2}, 2, 2$

11. En las siguientes funciones, halla las derivadas parciales segundas y comprueba si se cumple el teorema de Schwartz:

(a) $f(x, y) = e^x \ln(3 + y^2)$ para cualquier (x, y)

(b) $f(x, y) = \frac{x-y}{xy}$ en $(0, 0)$

(c) $f(x, y) = e^x \sin y + \cos(2x - 3y)$ para cualquier (x, y)

12. Halla la derivada direccional de la función $f(x, y) = 2x^2 + xy$ en el punto $P_0 = (1, 0)$, en la dirección del vector $(3, 4)$, utilizando la definición de derivada direccional.

13. Halla el vector gradiente de la función $f(x, y) = x^2y + xy^3$ en el punto $(-1, 2)$.

~~14.~~ Se describe la superficie de una montaña mediante la ecuación $f(x, y) = 4000 - 0.0001x^2 - 0.004y^2$. En qué dirección debe moverse el alpinista que está en el punto $(500, 300, 3390)$ para ascender lo más rápidamente posible? ¿Cuánto vale en esa dirección la pendiente de la montaña? ¿En qué dirección debe moverse para esquiar horizontalmente?

~~15.~~ La temperatura, en grados celsius, sobre la superficie de una placa metálica viene dada por $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$ midiéndose x, y en pulgadas. Desde el punto $(2, -3)$. ¿En qué dirección crece la temperatura más rápidamente? ¿A qué razón se produce ese crecimiento?

~~16.~~ Calcula la recta normal a la elipse $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $y = 1$

~~17.~~ Calcula la recta normal y el plano tangente a la superficie definida por $xyz - 4xz^3 + y^3 - 10 = 0$ en el punto $(-1, 2, 1)$

18. Busca los puntos del hiperboloide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 0$

19. Busca los puntos del paraboloides $z = 4x^2 + 9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 4, 3)$ y $(5, -1, 2)$.

~~20.~~ Dada la función $f(x, y) = x^2y - y^2$ donde $x = \operatorname{sen} t$ e $y = e^t$, halla dz/dt cuando $t = 0$ aplicando la regla de la cadena.

21. Dada la función $f(x, y) = 2xy$ donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$, halla $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial t$ aplicando la regla de la cadena

22. Halla $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para las funciones siguientes:

a) $w = xy + yz + xz$ donde $x = s \cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$ y $z = t$.

b) $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$ donde $x = t + s$, $y = t - s$ y $z = 2ts$.

23. Calcula dy/dx siendo $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.

~~24.~~ Calcula $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ siendo $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.

25. Prueba que $(0, 0)$ es mínimo de la función $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Prueba que $(0, 0)$ no es extremo de $f(x, y) = y^2 - x^2$

26. Determina los extremos relativos de las siguientes funciones con ayuda del Hessiano:

~~(a)~~ $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

(b) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

(c) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

(d) $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$

(e) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(f) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 + 1}$

(g) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

(h) $f(x, y) = x^2y^2$

27. Una lámina metálica rectangular mide 5 m. de ancho y 8 m. de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pizca metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. ¿Como debe hacerse para obtener una caja del máximo volumen posible?

28. Determina el valor de tres números reales cuya suma sea 1000 y cuyo producto sea máximo.

~~29.~~ Se pretende construir una caja rectangular sin tapa de volumen 12 litros. El material para el fondo cuesta 4 euros el decímetro cuadrado, el de dos de los laterales a 3 euros y el de los otros dos a 2 euros. Qué dimensiones de la caja tiene un coste de fabricación mínimo?

~~30.~~ Halla las dimensiones de una caja rectangular abierta con superficie A y volumen máximo.

31. Halla la distancia más corta entre el punto $(2, 1, -1)$ y el plano $4x - 3y + z = 5$.

32. Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Halla el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$.

Posible de examen

Prob. Tipo

33. Expresa el lagrangiano y determina los extremos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican en cada caso:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$

(b) $f(x, y) = 3x^2 + y^3$ sujeto a $x^2 + y^2 - 9 = 0$

(c) $f(x, y) = 4xy$ sujeto a $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

(d) $f(x, y) = xy$ sujeto a $x + y = 10$

(e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x + y - 4 = 0$

(f) $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeto a $y - x^2 = 0$

(g) $f(x, y) = xy$ sujeto a $x^2 + y^2 + xy = 4$

34. Halla el punto de la recta, intersección de los planos $x - y = 2$, $x - 2z = 4$ que es más próximo al origen de coordenadas.

35. Calcula el volumen máximo posible de una caja rectangular con sus caras paralelas a los planos coordenados y que está inscrita en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

36. Sea C el arco contenido en el primer octante de la curva en que se intersecan el paraboloides $2z = 16 - x^2 - y^2$ y el plano $x + y = 4$. Encuentra los puntos de C más cercano y más alejado del origen.

37. Determina los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 4$ en el semicírculo delimitado por $y > 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$

38. Determina los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$ en el recinto limitado por $y = x^2$, $y = 4$

39. Halla los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el círculo $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.

40. Calcula los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$ en el interior del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$

41. Halla el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto limitado por las rectas $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$ e $y = -1 + x$.