Cálculo. 6 de febrero de 2012

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________________

Especialidad: ______________ **Grupo:** ______________ **D.N.I :** ______________

1. Calcula el módulo y el argumento de las raíces cúbicas de $1-i$.

2. En cada caso calcula si existe el valor de los límites

   a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2\,(y-2)}{x^4+(y-2)^2}$.

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x^2\cos x}\right)$

3. Calcula el valor de t que hace que la recta $x=t$ divida el área de la función

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

   entre 0 y 1 en dos partes iguales.

4. Justifica el carácter de las series hallando la suma para las que converjan

   a) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{17}}+\cdots$

   b) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{3^{2n}}$

5. Dada la función $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$, dibuja en el plano su dominio y sus curvas de nivel.

6. Estudiar la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(x^2y\right)}{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

7. *a*) Justifica que la ecuación $F(x,y,z)=xyze^z=0$ determina una función $z=f(x,y)$ tal que f es diferenciable en un entorno del punto $(1,1)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto $(1,1,f(1,1))$.

   b) Calcula los puntos $P(x,y,z)$ del elipsoide $x^2+2y^2+3z^2=1$ en los que la recta normal en $P(x,y,z)$ pasa por el origen de coordenadas.

8. El plano $x+y=1$ corta al cono $z^2=x^2+y^2$ formando alguna curva. Calcula el punto de esa curva más cercano al origen.

Soluciones:

Ejercicio 1 (Raíz de un número complejo) *Calcula el módulo y el argumento de las raíces cúbicas de* $1-i$.

Solución. En primer lugar expresamos el número complejo en forma polar o exponencial. Para ello tenemos en cuenta las expresiones

$$z = a+bi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow z = a+bi = (r)_{\varphi} = r\, e^{\varphi\, i} = r\, e^{(\varphi+2k\pi)\, i}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

de donde,

$$z = 1-i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}. \end{array} \right\} z = \left(\sqrt{2}\right)_{-\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}\, i} = \sqrt{2}\, e^{\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) i}$$

Para calcular la raíz cúbica hallamos su módulo y su argumento:

– El módulo de las raíces cúbicas viene definido por

$$\rho = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}.$$

– Los argumentos vienen definidos por la expresión

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{3} = \frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}; \text{ con } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Dando valores a k tenemos:

$$\theta_0 = \frac{-\pi/4}{3} = -\frac{\pi}{12};$$
$$\theta_1 = \frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12};$$
$$\theta_2 = \frac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12}.$$

Luego las raíces son:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{-\frac{\pi}{12}\, i}, \quad z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{7\pi}{12}\, i}, \quad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{15\pi}{12}\, i}.$$

Geométricamente, las tres raíces del número complejo $z = 1-i$ constituyen un triángulo equilátero que se inscribe en la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[6]{2}$.

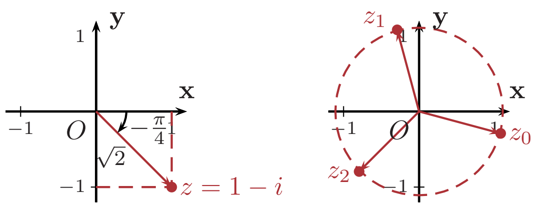

Figura 1: Un número complejo y sus tres raíces cúbicas.

Nota: Si utilizamos la forma exponencial generalizada, los cálculos se hacen más evidentes. En efecto,

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\, e^{\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) i}} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}{3}\, i} \quad \text{con } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Ejercicio 2 (Límites con una y dos variables) *En cada caso calcula si existe el valor de los límites*

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2\,(y-2)}{x^4+(y-2)^2}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2 \cos x} \right).$$

Solución. *a*) *Límite con dos variables*. Si nos acercamos al punto $(0,2)$ a través de las parábolas $y-2=ax^2$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2\,(y-2)}{x^4+(y-2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y-2=ax^2}} \frac{x^2\,ax^2}{x^4+a^2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^4(1+a^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2} = f(a);$$

luego el límite dado no existe, por depender de la trayectoria a través de la que nos acercamos al punto.

b) *Límite con una variable*. Al hacer la sustitución directa nos encontramos con la indeterminación $\infty-\infty$. Operamos para convertirla en una indeterminación del tipo $0/0$. En efecto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\,\mathrm{sen}\,x} - \frac{1}{x^2\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x}{x^3\,\mathrm{sen}\,x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Para calcular el nuevo límite, utilizamos, en el numerador, los desarrollos limitados de Taylor:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}; \quad \mathrm{sen}\,x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

y en el denominador el infinitésimo $\mathrm{sen}\,x^2 \sim x^2$, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left[1-\frac{x^2}{2}\right] - \left[x - \frac{x^3}{6}\right]}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}}{x^3\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x^3/6}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cos x} = -\frac{1}{3}.$$

Nota: El segundo límite también puede calcularse combinando los infinitésimos con la regla de L'Hôpital. Para simplificar las reglas de L'Hôpital, en el denominador se puede aplicar la igualdad $\mathrm{sen}(2x) = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$, con lo que se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2\,\mathrm{sen}\,x\cos x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2\,\mathrm{sen}(2x)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^2 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\,\mathrm{sen}\,x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Ejercicio 3 (Área) *Calcula el valor de t que hace que la recta $x=t$ divida el área de la función*

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

entre 0 *y* 1 *en dos partes iguales.*

Solución. La curva viene representada en la Figura 2, en esta página.
El área de la región viene definida por la siguiente integral

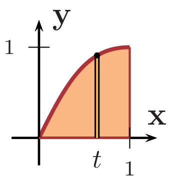

Figura 2: Región.

$$\text{Área} = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \Big[\ln\left|x^2+1\right|\Big]_0^1 = \ln 2.$$

Se trata, ahora, de encontrar un punto $t \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^t \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln 2}{2}\cdot$$

Es decir,

$$\int_0^t \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \Big[\ln\left|x^2+1\right|\Big]_0^t = \ln\left|t^2+1\right| = \frac{\ln 2}{2}\cdot$$

Luego tenemos que resolver la ecuación

$$\ln\left|t^2+1\right| = \frac{\ln 2}{2}\cdot$$

Para ello la expresamos como una igualdad de logaritmos y eliminamos el valor absoluto por ser $t^2+1>0$..

$$\ln\left(t^2+1\right) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2} \Rightarrow t^2+1=\sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0{,}64\cdot$$

Nota: El problema también puede plantearse de la siguiente forma

$$\int_0^t \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_t^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx.$$

de donde

$$\Big[\ln\left|x^2+1\right|\Big]_0^t = \Big[\left|x^2+1\right|\Big]_t^1 \Rightarrow \ln\left|t^2+1\right| = \ln 2 - \ln\left|t^2+1\right|;$$

El valor absoluto se puede suprimir ya que $t^2+1>0$, con lo que resulta

$$2\ln\left|t^2+1\right| = \ln 2 \Rightarrow \ln(t^2+1) = \ln\sqrt{2} \Rightarrow t^2+1=\sqrt{2} \Rightarrow t=\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Ejercicio 4 (Convergencia y suma de series numéricas) *Justifica el carácter de las series hallando la suma para las que converjan*

$$a)\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{17}}+\cdots; \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{3^{2n}}\cdot$$

Solución. Las dos series son de términos positivos.

a) La primera serie se puede expresar de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{17}}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

que es divergente, ya que su término general es del mismo orden que el de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt{1} = 1 \begin{cases} >0, \\ <\infty. \end{cases}$$

b) La segunda serie es una serie geométrica, ya que se puede expresar de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n.$$

Luego se trata de una serie geométrica de razón $r = 5/9 < 1$ y por tanto convergente. Su suma viene definida por la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\cdot$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{1}{1-5/9} = \frac{9}{4}\cdot$$

Ejercicio 5 (Dominio y curvas de nivel) *Dada la función $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$, dibuja en el plano su dominio y sus curvas de nivel.*

Solución. – *Dominio*. Para que la función esté definida tendrá que ser

$$y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2 \Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y \geq x^2\}.$$

Para hallar su representación gráfica: primero representamos la curva $y = x^2$, por encima de la curva están los puntos donde $y \geq x^2$ y por debajo aquellos en los que $y \leq x^2$. En consecuencia, el dominio es la parte del plano situada sobre la curva $y = x^2$, incluida la curva.

– *Curvas de nivel*. Las curvas de nivel son las proyecciones sobre el dominio de las curvas de contorno que se obtienen al cortar la superficie mediante planos horizontales. Para hallar las curvas de nivel: primero, cambiamos $f(x,y)$ por z y, en segundo lugar, suponemos que z es un número. Para cada valor que demos a z tenemos una curva de nivel.

$$f(x,y) = z \Rightarrow z = \sqrt{y-x^2}.$$

Al ser z el resultado de una raíz cuadrada, solo puede tomar valores positivos (o cero). Operando, se tienen las curvas de nivel

$$\sqrt{y-x^2} = z \Rightarrow y - x^2 = z^2 \Rightarrow y = x^2 + z^2.$$

Que son parábolas (dado que z es un número). Para tener una idea más clara, sustituímos z por k y le damos varios valores.

$$y = x^2 + k^2 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow y = x^2, \\ k = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1, \\ k = 2 \Rightarrow y = x^2 + 4. \end{cases}$$

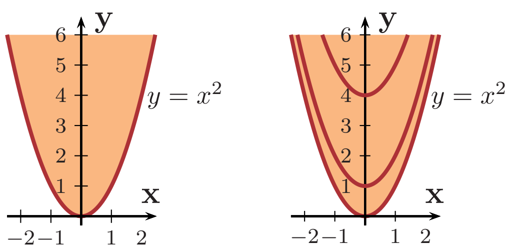

Figura 3: Dominio y curvas de nivel.

Ejercicio 6 (Diferenciabilidad) *Estudiar la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2 y)}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución. Para que la función sea diferenciable en el punto $(0,0)$ tiene que cumplir dos condiciones:

a) Existencia de la derivadas parciales. Para calcular las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ aplicamos la definición, y, para ello, hacemos los siguientes cálculos previos:

$$f(h,0) = \frac{1-\cos(h^2\cdot 0)}{\operatorname{sen}(h^2+0)} = \frac{0}{\operatorname{sen} h^2} = 0; \qquad f(0,k) = \frac{1-\cos(0\cdot k)}{\operatorname{sen}(0+k^2)} = \frac{0}{\operatorname{sen} k^2} = 0;$$

de donde:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$
$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0.$$

b) Límite cero. El siguiente límite ha de ser cero.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f(0,0)-\lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Donde

$$\Delta f(0,0) = f(h,k)-f(0,0) = f(h,k) = \frac{1-\cos(h^2k)}{\operatorname{sen}(h^2+k^2)};$$
$$\lambda(h,k) = f_x(0,0)\cdot h + f_y(0,0)\cdot k = 0\cdot h + 0\cdot k = 0+0 = 0.$$

Que llevados a la expresión del límite, resulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f(0,0)-\lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{1-\cos(h^2k)}{\operatorname{sen}(h^2+k^2)}-0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1-\cos(h^2k)}{\operatorname{sen}(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4k^2/2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{2}\lim_{(h,k)\to(0,0)} hk^2\frac{h^2}{h^2+k^2}\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{2}\cdot 0\cdot \text{Acotado}\cdot\text{Acotado} = 0.$$

Nota: En el cálculo del límite se han tenido en cuenta los siguientes infinitésimos:

$$1-\cos z \sim \frac{z^2}{2} \;\Rightarrow\; 1-\cos(h^2k) \sim \frac{(h^2k)^2}{2} = \frac{h^4k^2}{2};$$
$$\operatorname{sen} z \sim z \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(h^2+k^2) \sim h^2+k^2.$$

Y las siguientes acotaciones:

$$0 \le \frac{h^2}{h^2+k^2} \le 1; \qquad -1 \le \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1.$$

Ejercicio 7 (Función implícita de dos variables y recta normal)

a) *Justifica que la ecuación $F(x,y,z) = xyze^z = 0$ determina una función $z = f(x,y)$ tal que f es diferenciable en un entorno del punto $(1,1)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,1,f(1,1))$.*

b) *Calcula los puntos $P(x,y,z)$ del elipsoide $x^2+2y^2+3z^2 = 1$ en los que la recta normal en $P(x,y,z)$ pasa por el origen de coordenadas.*

Solución. El teorema de la función implícita afirma que una ecuación del tipo $F(x,y,z) = 0$ define una función $z = f(x,y)$ diferenciable en un punto $\mathbf{p}(x,y)$, si se cumplen las tres condiciones siguientes: el punto $P(x,y,z)$ cumple la ecuación $F(P) = 0$, las derivadas parciales de F son continuas en P, y $F_z(P) \neq 0$.

– El punto P que cumple la ecuación dada viene definido por $x = 1$, $y = 1$, de donde, resulta

$$1\cdot 1\cdot z\,e^z = 0 \quad\Rightarrow\quad z = 0, \text{ ya que } e^z \neq 0.$$

con lo cual, el punto P que cumple la ecuación dada es $P = (1, 1, 0)$.
– Las derivadas parciales de $F(x, y, z) = xyze^z$ son continuas en $\mathbb{R}^3$ y por tanto en P. En efecto:

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= yze^z\,; \\ F_y(x, y, z) &= xze^z; \\ F_z(x, y, z) &= xye^z + xyze^z. \end{aligned}$$

– Y además: $F_z(1, 1, 0) = e^0 + 0 = 1 \neq 0$. Luego podemos afirmar la existencia de la función $z = f(x, y)$ diferenciable, en el punto $(1, 1)$.
En virtud del teorema de la función implícita tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{-yze^z}{xye^z + xyze^z}\,; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{-xze^z}{xye^z + xyze^z}\,. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{-F_x(1, 1, 0)}{F_z(1, 1, 0)} = \frac{0}{1} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \frac{-F_y(1, 1, 0)}{F_z(1, 1, 0)} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) viene definida por

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

resulta:

$$z = 0.$$

Nota 1: Téngase en cuenta que la gráfica de la ecuación $xyze^z = 0$ se reduce a los tres planos coordenados, ya que para que un punto cumpla dicha ecuación, al menos una de las coordenadas x, y o z ha de ser cero. El plano coordenado que contiene al punto de coordenadas $x = 1$, $y = 1$ es el plano horizontal $z = 0$. Que es una función y que coincide con su plano tangente.
Nota 2: En la ecuación $xyze^z = 0$ se puede suprimir el factor e^z, ya que dicho factor es siempre distinto de cero $e^z \neq 0$, y hacer el estudio con la expresión $xyz = 0$.

$$xyze^z = 0 \Rightarrow xyz = 0.$$

b) Consideremos una recta que pase por el origen de coordenadas. El vector director de la recta coincide con el vector de posición de cualquiera de sus puntos $X(x, y, z)$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OX} = \mathbf{r}(X) = (x, y, z).$$

Por otro lado, la recta normal al elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ en el punto (x, y, z) tiene como vector director el gradiente de la función $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ en dicho punto. Es decir,

$$\vec{n} = \nabla F(x, y, z) = (2x, 4y, 6z).$$

Para que dicha recta pase por el origen de coordenadas, ambos vectores han de ser paralelos y, en consecuencia, sus componentes han de ser proporcionales.

$$\nabla F(X) \parallel \mathbf{r}(X) \Rightarrow (2x, 4y, 6z) = \lambda(x, y, z).$$

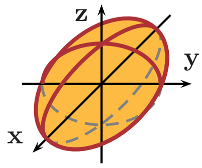

Figura 4: Elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Lo cual solo es posible si al menos dos componentes son simultáneamente nulas. Con lo que resultan los puntos:

$$\begin{array}{l} y = z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P(1,0,0) \text{ y } Q(-1,0,0). \\ x = z = 0 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1/2} \Rightarrow R(0,\sqrt{1/2},0) \text{ y } S(0,-\sqrt{1/2},0). \\ x = y = 0 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1/3} \Rightarrow T(0,0,\sqrt{1/3}) \text{ y } U(0,0,-\sqrt{1/3}). \end{array}$$

Nota: Al mismo razonamiento se llega si partimos de la ecuación de la recta $X = P + \lambda\vec{v}$ en cualquiera de sus formas: continua, vectorial o paramétrica:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0 z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0 z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0 z_0)}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\left(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda F_x(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + \lambda F_y(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + \lambda F_z(x_0, y_0, z_0) \end{array} \right.$$

En efecto, sustituyendo, por ejemplo, en la forma continua, se tiene para la recta perpendicular al elipsoide

$$\frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{4y_0} = \frac{z - z_0}{6z_0}$$

Para que dicha recta pase por el origen de coordenadas deberá ser

$$\frac{-x_0}{2x_0} = \frac{-y_0}{4y_0} = \frac{-z_0}{6z_0} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

lo que es absurdo. Para evitar esa contradicción dos de las tres componentes del vector director han de ser nulas.

Ejercicio 8 (Extremos absolutos de funciones de varias variables) *El plano $x + y = 1$ corta al cono $z^2 = x^2 + y^2$ formando alguna curva. Calcula el punto de esa curva más cercano al origen.*

Solución. Lo primero que tenemos que plantearnos es la siguiente cuestión ¿qué ha de ser máximo o mínimo? La respesta es que la *distancia* desde el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$ a un punto del espacio (x, y, z) ha de ser mínima. Pero, además, ese punto ha de estar en la intersección del plano $x + y = 1$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Es decir, se trata de encontrar el mínimo de la función

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

sujeto a las dos restricciones:

$$x + y = 1 \quad \text{y} \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

Como el mínimo de la raíz cuadrada está en el mínimo de su radicando, cambiamos la función d por su cuadrado $D = d^2$. La manera más fácil de resolver el problema es mediante la sustitución de las variables.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow D = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 =$$

$$= 2x^2 + 2(1 - x)^2 = 2x^2 + 2(1 - 2x + x^2) = 2x^2 + 2 - 4x + 2x^2 = 4x^2 - 4x + 2.$$

Luego se trata de encontrar el mínimo de la función de una variable $D = 4x^2 - 4x + 2$. Para ello hallamos sus puntos críticos

$$D' = 8x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

y comprobamos si realmente se trata de un mínimo.

$$D'' = 8 \Rightarrow D''(1/2) = 8 > 0 \Rightarrow \text{se trata de un mínimo}$$

Para determinar las coordenadas del punto en cuestión basta con sustituir en las ecuaciones anteriores:

$$x = 1/2 \Rightarrow y = 1 - 1/2 = 1/2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1/4 + 1/4} = \pm\sqrt{2/4} = \pm\sqrt{2}/2.$$

Luego el punto buscado es $P(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$, para el cono superior y $Q(1/2, 1/2, -\sqrt{2}/2)$, para el inferior.

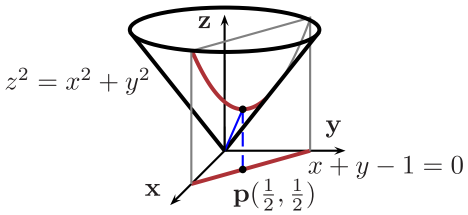

Figura 5: Mínimo condicionado.

Nota: El problema también puede abordarse de otra manera. Puesto que el punto en cuestión está situado en un cono con vértice en el origen de coordenadas y eje coincidente con el eje Oz. Es evidente (ver Fig. 5) que el punto más cercano al origen es aquel que tiene la cota más baja. Es decir, que el problema se puede traducir en encontrar el mínimo de la función

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

condicionado por la ecuación $x + y - 1 = 0$.

Igual que antes, podemos eliminar la raíz cuadrada. El problema puede resolverse por sustitución como se ha hecho anteriormente o bien usando los multiplicadores de Lagrange. Para ello formamos la función de Lagrange

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Los puntos críticos de esta función vendrán determinados por las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv 2x + \lambda = 0 \\ L_y \equiv 2y + \lambda = 0 \\ L_\lambda \equiv x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \lambda = -2x \\ \lambda = -2y \end{array}\right\} - 2x = -2y \Rightarrow x = y \\ x + y = 1 \rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Luego el único punto crítico es el punto $\mathbf{p}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Para determinar su naturaleza podemos seguir dos procedimientos:
a) Considerar que el problema se ha resuelto mediante sustitución de la variable. En este caso es posible ya que la ecuación $x + y - 1 = 0$ define perfectamente y en función de x, $y = y(x)$. En efecto $y = 1 - x$, que sustituido en $f(x, y) = x^2 + y^2$ da una función de una variable; luego la naturaleza del punto crítico vendrá determinada por el signo de la derivada segunda en el punto crítico. Tenemos

$$\begin{array}{l} f\left(x, y(x)\right) = x^2 + (1 - x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1, \\ f'\left(x, y(x)\right) = 4x - 2, \\ f''\left(x, y(x)\right) = 4. \end{array}$$

Y sustituyendo las coordenadas del punto crítico, se tiene

$$\begin{array}{l} f'\left(1/2, 1/2\right) = 2 - 2 = 0, \\ f''\left(1/2, 1/2\right) = 4 > 0. \end{array}$$

Luego se trata de un mínimo.

b) Estudiamos el signo del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = - \Rightarrow \text{mínimo}, \\ = + \Rightarrow \text{máximo}, \\ = 0 \Rightarrow \text{duda}. \end{array}$$

De donde,

$$\Delta L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \Rightarrow \text{mínimo.}$$