#1: LOAD(C:\Derive\Complejos.mth)

PRÁCTICA 4

EJERCICIO 1

#2: SUBST(f, z, c)

#3: $\text{SUBST}(f,\ z,\ c)\cdot\frac{d}{dt}\ c$

#4: $\int_a^b \text{SUBST}(f,\ z,\ c)\cdot\frac{d}{dt}\ c\ dt$

#5: $\text{integralcomplejapractica}(f,\ c,\ a,\ b) := \int_a^b \text{SUBST}(f,\ z,\ c)\cdot\frac{d}{dt}\ c\ dt$

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

#6: integralcomplejapractica(Modulo(z)·Conjugado(z), COS(t) + i·SIN(t), 0, π)

#7: $\pi\cdot i$

#8: [-1, 0] + t·([1, 0] - [-1, 0])

#9: [2·t - 1, 0]

#10: integralcomplejapractica(Modulo(z)·Conjugado(z), 2·t - 1, 0, 1)

#11: 0

#12: integralcomplejapractica(Modulo(z)·Conjugado(z), COS(t) + i·SIN(t), 0, π) + integralcomplejapractica(Modulo(z)·Conjugado(z), 2·t - 1, 0, 1)

#13: $\pi\cdot i$

EJERCICIO 2

#14: $\text{integralcomplejaanaliticapractica}(f,\ a,\ b) := \int_a^b f\ dz$

EJERCICIO DE COMPROBACIÓN

a), b) y c)

#15: integralcomplejaanaliticapractica(z + 3·z, 2, 2·i)

#16: $$- \frac{44}{3} - \frac{8 \cdot i}{3}$$

d)

La función es analítica por ser un polinomio. El camino o curva de integración es un camino cerrado por ser una circunferencia. Por lo tanto, el teorema integral de Cauchy (función analítica + camino cerrado -> integral 0) nos asegura que el resultado de esta integral vale:

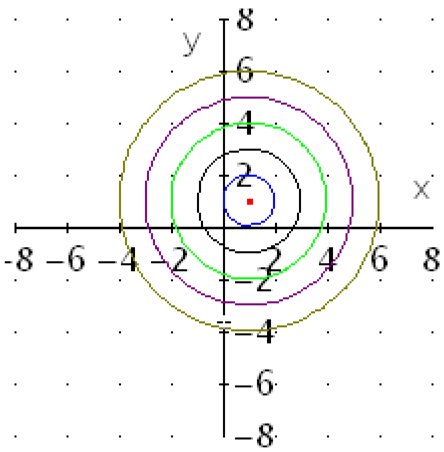
#17: $$0$$

EJERCICIO 3

#18: VECTOR(Region(Modulo(z - 1 - i), =, r), r, 1, 5)

#19: $$\left[x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = -1,\ x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = 2,\ x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = 7,\ x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = 14,\ x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y = 23\right]$$

#20: [1, 1]



z

#21: FormulaCauchy(e , 1 + i, 3)

Las fórmulas integrales de Cauchy establecen que dada una función f(z) analítica en C y a un punto de su interior, la derivada n–ésima de f en a viene dada por la expresión

∂(f,a,n) = n!/(2πi)*∫f(z)/(z–a)^(n+1)dz

Despejando la integral de la expresión anterior se pueden utilizar las fórmulas integrales de Cauchy para calcular el valor de ese tipo de integrales. En este caso, el valor de la integral es:

#22: $$-\frac{\pi \cdot e \cdot \mathrm{SIN}(1)}{3} + \frac{\pi \cdot e \cdot i \cdot \mathrm{COS}(1)}{3}$$

EJERCICIO 4

#23: Region(Modulo(z), =, 1)

#24: $$x^2 + y^2 = 1$$

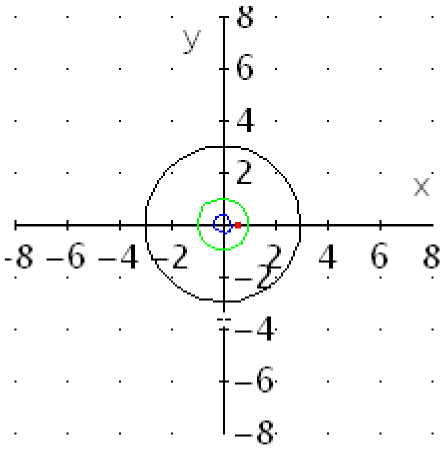
#25: Region(Modulo(z), =, 3)

#26: $$x^2 + y^2 = 9$$

#27: $$\mathrm{Region}\left(\mathrm{Modulo}(z),\ =,\ \frac{1}{3}\right)$$

#28: $$x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$

#29: $$\left[\frac{\pi}{6},\ 0\right]$$



EJERCICIOS 4 a) y 4 b)

#30: $\text{FormulaCauchy}\left(\text{SIN}(z)^6,\ \frac{\pi}{6},\ 0\right)$

Las fórmulas integrales de Cauchy establecen que dada una función f(z) analítica en C y a un punto de su interior, la derivada n-ésima de f en a viene dada por la expresión

$\partial(f,a,n) = n!/(2\pi i)*\int f(z)/(z-a)^\wedge(n+1)dz$

Despejando la integral de la expresión anterior se pueden utilizar las fórmulas integrales de Cauchy para calcular el valor de ese tipo de integrales. En este caso, el valor de la integral es:

#31: $$\frac{\pi \cdot i}{32}$$

EJERCICIO 4 c)

La función es analítica por ser cociente de funciones analíticas (una función trigonométrica elevada a 6, y un polinomio) salvo en pi/6 punto en el que se anula el denominador. Como dicho punto está fuera del recinto de integración, la función es analítica en el recinto y su interior. El camino o curva de integración es un camino cerrado por ser una circunferencia. Por lo tanto, el teorema integral de Cauchy (función analítica + camino cerrado -> integral 0) nos asegura que el resultado de esta integral vale:

#32: $$0$$

EJERCICIOS 4 d) y e)

#33: $\text{FormulaCauchy}\left(\text{SIN}(z)^6, \frac{\pi}{6}, 2\right)$

Las fórmulas integrales de Cauchy establecen que dada una función f(z) analítica en C y a un punto de su interior, la derivada n-ésima de f en a viene dada por la expresión

$\partial(f,a,n) = n!/(2\pi i)*\int f(z)/(z-a)\text{^}(n+1)dz$

Despejando la integral de la expresión anterior se pueden utilizar las fórmulas integrales de Cauchy para calcular el valor de ese tipo de integrales. En este caso, el valor de la integral es:

#34: $$\frac{21\cdot\pi\cdot i}{16}$$

EJERCICIO 4 f)

La función es analítica por ser cociente de funciones analíticas (una función trigonométrica elevada a 6, y un polinomio) salvo en pi/6 punto en el que se anula el denominador. Como dicho punto está fuera del recinto de integración, la función es analítica en el recinto y su interior. El camino o curva de integración es un camino cerrado por ser una circunferencia. Por lo tanto, el teorema integral de Cauchy (función analítica + camino cerrado -> integral 0) nos asegura que el resultado de esta integral vale:

#35: $$0$$