Preliminares del tema 3

Contenidos de los preliminares

3.1. Algunas primitivas

Ejercicios resueltos

- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(1-\cos(2x)\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + C$
- $\displaystyle\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(1+\cos(2x)\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + C$

3.2. Una primitiva por cambio de variable

Ejercicio resuelto

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio } \; e^x = t \\ \\ e^x\,dx = dt \implies dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t} \end{array} \right\} \int \frac{t^2}{t+1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}\,dt$$

$$= \int \left(1 + \frac{-1}{t+1}\right) dt = t - \ln(t+1) + C = e^x - \ln\left(e^x+1\right) + C$$

Ejercicio propuesto

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

Solución: $\ln\left(e^x+1\right)+C$

3.3. Igualdades notables

Las igualdades notables pueden ayudar a calcular más rápidamente las raíces de polinomios, además de acelerar los cálculos, simplificar algunas expresiones, factorizar o desarrollar expresiones matemáticas.

Fórmulas

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab \\ (a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \end{aligned}$$

3.4. Ecuaciones bicuadradas

Se denominan ecuaciones bicuadradas a las ecuaciones de cuarto grado en las que no aparecen términos de tercer ni de primer grado. Por ejemplo:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad ; \quad x^4 - 4 = x^2 \quad ; \quad 2x^4 - 5x^2 + 7 = 0$$

Para resolver este tipo de ecuaciones basta con hacer el cambio $x^2 = t$. Con este cambio se reducen a ecuaciones de segundo grado.

Ejercicios resueltos

- Resolver la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

  Con el cambio $x^2 = t$ nos queda la ecuación $t^2 - 5t + 4 = 0$.

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \implies t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{2} = 4 \\[2ex] \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

  Deshaciendo el cambio nos queda:

$$t = 4 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2 \quad ; \quad t = 1 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

- Resolver la ecuación $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

  Con el cambio $x^2 = t$ nos queda la ecuación $t^2 - 5t - 36 = 0$.

$$t^2 - 5t - 36 = 0 \implies t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+13}{2} = 9 \\[2ex] \dfrac{5-13}{2} = -4 \end{cases}$$

  Deshaciendo el cambio nos queda:

$$t = 9 \implies x^2 = 9 \implies x = \pm 3 \quad ; \quad t = -4 \implies x^2 = -4 \implies x = \pm 2\,i$$

Ejercicios propuestos

- Resolver la ecuación $x^4 - 16 = 0$ Solución: $x = \pm 2$; $x = \pm 2\,i$
- Resolver la ecuación $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ Solución: $x = \pm\sqrt{3}$; $x = \pm\sqrt{5}$
- Resolver la ecuación $x^4 + 8x^2 + 16 = 0$ Solución: $x = \pm 2\,i$ dobles

3.5. Construcción de un polinomio de segundo grado a partir de sus raíces

Procedimiento

Supongamos que a y b son las raíces de un polinomio de segundo grado. Es evidente que un polinomio que tiene esas raíces es $(x-a)(x-b)$. Si operamos nos queda

$$(x-a)(x-b) = x^2 - bx - ax + ab = x^2 - (a+b)x + ab$$

Por lo tanto, si llamamos $S = a + b$ y $P = ab$ se tiene que un polinomio de segundo grado que tiene como raíces a y b es $x^2 - Sx + P$.

Así, conociendo la suma y el producto de las dos raíces es inmediata la construcción del polinomio de segundo grado que tiene esas raíces.

Este procedimiento está especialmente indicado cuando las raíces son complejas.

Ejercicios resueltos

- Construir un polinomio de segundo grado que tenga como raíces 2 y 5.

  $$S = 2 + 5 = 7\ ;\ P = 2 \cdot 5 = 10 \quad \Longrightarrow \quad \text{un polinomio es } x^2 - 7x + 10$$

- Construir un polinomio de segundo grado que tenga como raíces $2 \pm 3\,i$.

  $$S = 2 + 3\,i + 2 - 3\,i = 4\ ;\ P = (2+3\,i)(2-3\,i) = 2^2 - (3\,i)^2 = 4 + 9 = 13$$

  Así, un polinomio es $x^2 - 4x + 13$

Ejercicios propuestos

- Construir un polinomio de segundo grado que tenga como raíces 3 y -2. Solución: $x^2 - x - 6$
- Construir un polinomio de segundo grado que tenga como raíces $3 \pm 5\,i$. Solución: $x^2 - 6x + 34$
- Construir un polinomio de segundo grado que tenga como raíces $3 \pm 3\,i$. Solución: $x^2 - 6x + 18$

3.6. Contenidos adicionales

Para los ejercicios de este tema es necesario utilizar asiduamente la regla de Ruffini así como tener soltura en la descomposición de polinomios. Para repasar estos contenidos se puede utilizar cualquier libro de cuarto de secundaria.

Otra opción es consultar el material contenido en la página

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Polinomios/index.htm

Por último, también se puede utilizar el tema correspondiente en el material `Matex` que se encuentra en la dirección

`http://personales.unican.es/gonzaleof/Sociales_1/polinomios.pdf` .

El tema de polinomios se encuentra en la parte correspondiente a primero de Bachillerato de las Ciencias Sociales.