Preliminares del tema 4

Contenidos de los preliminares

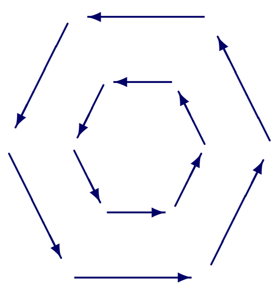
- Rotacional de un campo vectorial
- Construcción de la función potencial en $\mathbb{R}^3$

4.1. Rotacional de un campo vectorial

Fórmula

Sea $\vec{F} = \big(P, Q, R\big)$ un campo vectorial de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$.

El rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial que, en cada punto, nos da una indicación de cómo el campo forma remolinos en la cercanía de dicho punto. Se define el rotacional de $\vec{F}$ como el campo vectorial



$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Ejercicios resueltos

- Sea $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{\imath} - 2y\,\vec{\jmath} + 2xyz\,\vec{k}$. Calcular $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2y & 2xyz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(2xyz)}{\partial y}\vec{\imath} + \frac{\partial(xy)}{\partial z}\vec{\jmath} + \frac{\partial(-2y)}{\partial x}\vec{k} - \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y}\vec{k} + \frac{\partial(-2y)}{\partial z}\vec{\imath} + \frac{\partial(2xyz)}{\partial x}\vec{\jmath}\right)$$

$$= 2xz\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} - x\vec{k} + 0\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} \equiv (2xz, -2yz, -x)$$

Ejercicios propuestos

- Sea $\vec{F}(x,y,z) = y^2z^2\,\vec{\imath} + z^2x^2\,\vec{\jmath} + x^2y^2\,\vec{k}$. Calcular $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})$.

  Solución: $2\left(x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)\right)$

- Sea $\vec{F}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} - y^2\,\vec{\jmath} + 2x^2y\,\vec{k}$. Calcular $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F})$.

  Solución: $\left(2x^2, x - 4xy, 0\right)$

4.2. Construcción de la función potencial en $\mathbb{R}^3$

$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ es exacta si $\exists U : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$$

Recordemos que se tiene la siguiente caracterización:

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \quad \text{es exacta}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} \end{array} \right.$$

También se puede comprobar que una forma diferencial

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

es exacta si y sólo si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = \vec{0}$ siendo $\vec{F} = (P,Q,R)$.

Primer método

Dada una forma diferencial exacta $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, la función potencial $U(x,y,z)$ debe verificar las siguientes tres condiciones

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$$

Partiendo de la primera de estas condiciones se obtiene

$$U(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \Phi(y,z)$$

donde la función $\Phi(y,z)$ se determina derivando la expresión anterior con respecto a las variables y y z e igualándolas a las funciones $Q(x,y,z)$ y $R(x,y,z)$ respectivamente.

De forma análoga, podemos empezar por cualquiera de las otras dos condiciones y proceder de forma similar a lo realizado.

Segundo método

Por ser $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ una forma diferencial exacta tendremos que, dadas las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r = U(x,y,z) - U(a,b,c)$$

independientemente del camino que una el punto (a,b,c) con el punto (x,y,z).

Teniendo en cuenta que $U(a,b,c)$ es una constante, y que el potencial va a ser único salvo constantes, podemos calcular el potencial mediante

$$U(x,y,z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r$$

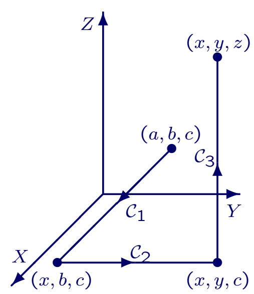
a lo largo de cualquier camino que una el punto (a,b,c) con el punto (x,y,z).

Consideremos la quebrada formada por los segmentos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ cuyas parametrizaciones vienen dadas por:

$$\mathcal{C}_1 \equiv \begin{cases} \vec{\alpha}(t) = (t,b,c) & t \in [a,x] \\ \vec{\alpha}'(t) = (1,0,0) \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_2 \equiv \begin{cases} \vec{\alpha}(t) = (x,t,c) & t \in [b,y] \\ \vec{\alpha}'(t) = (0,1,0) \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_3 \equiv \begin{cases} \vec{\alpha}(t) = (x,y,t) & t \in [c,z] \\ \vec{\alpha}'(t) = (0,0,1) \end{cases}$$



Aplicando la propiedad de aditividad con respecto al camino de integración, se verifica

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} P(p,q,r)\,\mathrm{d}p + Q(p,q,r)\,\mathrm{d}q + R(p,q,r)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{\mathcal{C}_2} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{\mathcal{C}_3} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_a^x P(t,b,c)\,\mathrm{d}t + \int_b^y Q(x,t,c)\,\mathrm{d}t + \int_c^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Obsérvese que las constantes a, b y c son arbitrarias, por lo que podremos asignarles el valor que creamos más oportuno. El valor nulo para las tres constantes suele ser un valor apropiado.

Ejercicios resueltos

- Dada la forma diferencial

$$\left(2xyz^3+2y\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2z^3+2x+6y\right)\,\mathrm{d}y+\left(3x^2yz^2+2z\right)\,\mathrm{d}z$$

calcular, si existe, su potencial.

Para ver si existe el potencial tendremos que ver que las derivadas parciales cruzadas coinciden dos a dos:

$$\frac{\partial\left(2xyz^3+2y\right)}{\partial y}=2xz^3+2=\frac{\partial\left(x^2z^3+2x+6y\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left(2xyz^3+2y\right)}{\partial z}=6xyz^2=\frac{\partial\left(3x^2yz^2+2z\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left(x^2z^3+2x+6y\right)}{\partial z}=3x^2z^2=\frac{\partial\left(3x^2yz^2+2z\right)}{\partial y}$$

Primer método

Sea

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=\int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\Phi(y,z)\\&=\int\left(2xyz^3+2y\right)\,\mathrm{d}x+\Phi(y,z)\\&=x^2yz^3+2xy+\Phi(y,z)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z)\implies x^2z^3+2x+\frac{\partial\Phi(y,z)}{\partial y}=x^2z^3+2x+6y$$

Por tanto,

$$\frac{\partial\Phi(y,z)}{\partial y}=6y\implies\Phi(y,z)=\int 6y\,\mathrm{d}y+\varphi(z)=3y^2+\varphi(z)$$

$$\implies U(x,y,z)=x^2yz^3+2xy+3y^2+\varphi(z)$$

Por último, calculando parciales con respecto a z:

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) \Longrightarrow 3x^2yz^2 + \varphi'(z) = 3x^2yz^2 + 2z$$

$$\Longrightarrow \varphi'(z) = 2z \Longrightarrow \varphi(z) = z^2$$

Así, $U(x,y,z) = x^2yz^3 + 2xy + 3y^2 + z^2$.

Segundo método

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}t + \int_0^y (2x+6t)\,\mathrm{d}t + \int_0^z \left(3x^2yt^2 + 2t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 2xy + 3y^2 + x^2yz^3 + z^2 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

- Dada la forma diferencial

$$(yz + y + z)\,\mathrm{d}x + (xz + x + z)\,\mathrm{d}y + (xy + x + y + 2z)\,\mathrm{d}z$$

calcular, si existe, su potencial.

Solución: $xyz + xy + xz + yz + z^2$

- Dada la forma diferencial

$$\left(3x^2yz + x^2\right)\,\mathrm{d}x + x^3z\,\mathrm{d}y + x^3y\,\mathrm{d}z$$

calcular, si existe, su potencial.

Solución: $\frac{x^3}{3} + x^3yz$

- Dada la forma diferencial

$$\left(x^2yz + x^2\right)\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y + xyz\,\mathrm{d}z$$

calcular, si existe, su potencial.

Solución: no es exacta