Preliminares del tema 5

Contenidos de los preliminares

- Algunas ideas sobre series de Fourier

5.1. Algunas ideas sobre series de Fourier

Mediante las series de Taylor, podemos obtener una aproximación polinómica para una función en los alrededores de un punto de su dominio bajo unas determinadas condiciones.

De la misma forma, y bajo ciertas condiciones, es posible obtener aproximaciones mediante series de funciones trigonométricas.

Definición

Se llama serie de Fourier de la función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ a la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big] = \frac{a_0}{2} +$$

$$+a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots +$$

$$+b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen}(2x) + b_3 \operatorname{sen}(3x) + \cdots$$

donde los coeficientes, llamados coeficientes de Fourier, vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, \mathrm{d}x$$

Extendiendo la definición anterior, se define la serie de Fourier de la función $f(x)$ en intervalo $[-L, L]$ a la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

donde los coeficientes, llamados coeficientes de Fourier, vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \qquad ; \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

Series de Fourier para funciones pares

Sea f(x) una función par. Su serie de Fourier en el intervalo $[-L, L]$ vendrá dada por la expresión

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

Series de Fourier para funciones impares

Sea f(x) una función impar. Su serie de Fourier en el intervalo $[-L, L]$ vendrá dada por la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

Series de Fourier para funciones definidas en medio intervalo

Supongamos que tenemos una función definida en el intervalo $[0, L]$. Podemos extender $f(x)$ al intervalo $[-L, 0]$ de las siguientes formas y obtener distintos desarrollos de Fourier:

- Si extendemos $f(x)$ al intervalo $[-L, 0]$ de forma que se obtenga una función par, obtenemos un desarrollo en serie de cosenos.
- Si extendemos $f(x)$ al intervalo $[-L, 0]$ de forma que se obtenga una función impar, obtenemos un desarrollo en serie de senos.
- Si extendemos $f(x)$ al intervalo $[-L, 0]$ de forma que se obtenga una función periódica de periodo L, obtenemos un desarrollo en serie de cosenos y senos.