Tema 1

Transformada de Laplace

Contenidos

1.1. Transformada de Laplace

Se define la transformada de Laplace de una función $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y se denota por $\mathcal{L}\Big[F(t)\Big]$ a la función $f(s)$ determinada por

$$\mathcal{L}\Big[F(t)\Big] = f(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} F(t)\, \mathrm{d}t$$

siempre que dicha integral exista.

Ejemplo 1.1
Calcular la transformada de Laplace de la función $F(t) = t$.

Solución:

$$\boxed{\mathcal{L}\Big[t\Big]} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, t\, \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{ll} \text{integración por partes} & \\ u = t & \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & v = \dfrac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \end{array} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-t\, \mathrm{e}^{-st}}{s} - \int \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t \right]_0^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-t\,\mathrm{e}^{-st}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2} \right]_0^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-n\,\mathrm{e}^{-sn}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-sn}}{s^2} + 0 + \frac{\mathrm{e}^0}{s^2} \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{s^2}} \qquad (\text{siempre que } \; s > 0)^*$$

* Obsérvese que esa condición es necesaria para que la integral sea convergente.

------ ○ ------

Transformadas de Laplace de las funciones elementales

$$\mathcal{L}\Big[1\Big] = \frac{1}{s} \qquad s > 0 \qquad\qquad \mathcal{L}\Big[\mathrm{e}^{at}\Big] = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

$$\mathcal{L}\Big[t^n\Big] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s > 0 \qquad\qquad \mathcal{L}\Big[t^x\Big] = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \qquad x > -1 \; ; \; s > 0$$

$$\mathcal{L}\Big[\mathrm{sen}(at)\Big] = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s > 0 \qquad\qquad \mathcal{L}\Big[\cos(at)\Big] = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}\Big[\mathrm{senh}(at)\Big] = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad s > |a| \qquad\qquad \mathcal{L}\Big[\cosh(at)\Big] = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad s > |a|$$

Ejemplo 1.2

Demostrar que $\mathcal{L}\Big[1\Big] = \dfrac{1}{s}$ *y que* $\mathcal{L}\Big[\mathrm{e}^{at}\Big] = \dfrac{1}{s-a}$.

Solución:

$$\mathcal{L}\Big[1\Big] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, 1\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_0^n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{s}\Big(\mathrm{e}^{-sn} - \mathrm{e}^0\Big) = \frac{1}{s} \qquad \text{(siempre que } s > 0)$$

$$\mathcal{L}\Big[\mathrm{e}^{at}\Big] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(s-a)}\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{-t(s-a)}}{-(s-a)}\right]_0^n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{s-a}\Big(\mathrm{e}^{-n(s-a)} - \mathrm{e}^0\Big)$$

$$= \frac{1}{s-a} \qquad \text{(siempre que } s > a)$$

------ o ------

Propiedades de la transformada de Laplace

Sean $f(s) = \mathcal{L}\Big[F(t)\Big]$ y $g(s) = \mathcal{L}\Big[G(t)\Big]$.

- $\mathcal{L}$ es un operador lineal, es decir, $\mathcal{L}\Big[a\,F(t) + b\,G(t)\Big] = a\,f(s) + b\,g(s)$
- Traslación: si $H(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ entonces $\mathcal{L}\Big[H(t)\Big] = \mathrm{e}^{-as} f(s)$
- Cambio de escala: $\mathcal{L}\Big[F(at)\Big] = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{s}{a}\right) \quad \forall\, a > 0$
- Transformada de la derivada: $\mathcal{L}\Big[F'(t)\Big] = s f(s) - F(0)$

  y, generalizando para derivada de orden n:

  $$\mathcal{L}\Big[F^{(n)}(t)\Big] = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

- Transformada de la integral: $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t F(u)\, \mathrm{d}u\right] = \dfrac{f(s)}{s}$
- Multiplicación por potencias de t: $\mathcal{L}\Big[t^n F(t)\Big] = (-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} f(s)$

- División por t: si $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t}$ existe, entonces $\mathcal{L}\left[\dfrac{F(t)}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty f(u)\,\mathrm{d}u$
- Multiplicación por exponenciales: si $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\alpha t}F(t)\right]=f(s-\alpha)$
- Convolución: si $F*G=\displaystyle\int_0^t F(u)G(t-u)\,\mathrm{d}u$ entonces $\mathcal{L}\left[F*G\right]=f(s)\cdot g(s)$

Ejemplo 1.3

Calcular:

(a) $\mathcal{L}\left[3\,\mathrm{e}^{2t}+2\cos(5t)\right]$ (b) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t\cosh(5t)\,\mathrm{d}t\right]$ (c) $\mathcal{L}\left[t^2\,\mathrm{sen}(2t)\right]$

(d) $\mathcal{L}\left[\dfrac{1-\cos(2t)}{t}\right]$ (e) $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{7t}\,t^{28}\right]$

Solución:

(a) $\mathcal{L}\left[3\,\mathrm{e}^{2t}+2\cos(5t)\right]=3\,\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]+2\,\mathcal{L}\left[\cos(5t)\right]=3\,\dfrac{1}{s-2}+2\,\dfrac{s}{s^2+25}$

(b) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t\cosh(5t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{\mathcal{L}\left[\cosh(5t)\right]}{s}=\dfrac{\frac{s}{s^2-25}}{s}=\dfrac{1}{s^2-25}$

(c) $\mathcal{L}\left[t^2\,\mathrm{sen}(2t)\right]=(-1)^2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(2t)\right]\right)=\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)''=2\left(\dfrac{-2s}{(s^2+4)^2}\right)'$

$=-4\,\dfrac{-3s^2+4}{(s^2+4)^3}$

(d) $\displaystyle \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos(2t)}{t} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2\,\mathrm{sen}(2t)}{1} = 0$ existe. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos(2t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}\big[1-\cos(2t)\big]\,\mathrm{d}u = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln u - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+4\right)\right]_s^n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\right]_s^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+4}} - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right] = -\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

(e) Como $\mathcal{L}\big[t^{28}\big] = \dfrac{28!}{s^{29}}$, entonces $\mathcal{L}\big[\mathrm{e}^{7t}\,t^{28}\big] = \dfrac{28!}{(s-7)^{29}}$

------ o ------

Cálculo de integrales impropias

Teniendo en cuenta las propiedades de las integrales dependientes de un parámetro, si $F(t)$ es una función continua (o posee un número numerable de discontinuidades) y $f(s) = \mathcal{L}\big[F(t)\big]$, se tendrá que

$$\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} f(s)$$

ya que $\displaystyle\lim_{s\to 0}\mathrm{e}^{-st}F(t) = F(t)$.

<u>Observación</u>: si la transformada $f(s)$ existe para $s>0$, el límite anterior sólo tendrá sentido calcularlo por la derecha de 0. Esto es:

$$\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} f(s)$$

Ejemplo 1.4

Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}t}{t}\,\mathrm{d}t.$

Solución:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t}{1} = 1 \quad \text{existe}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}\Big[\operatorname{sen} t\Big]\, du = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\, du = \lim_{n\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} u\Big]_s^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} s\Big] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right] = \lim_{s\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

------ o ------

Teoremas sobre transformadas de Laplace

Si $f(s) = \mathcal{L}\Big[F(t)\Big]$ se tiene que:

- Comportamiento en el infinito: $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$
- Teorema del valor inicial: Si $\lim_{t\to 0^+} F(t)$ existe, entonces $\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$
- Teorema del valor final: Si $\lim_{t\to\infty} F(t)$ existe, entonces $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0^+} sf(s)$

Ejemplo 1.5

Demostrar que no existe ninguna función $F(t)$ *tal que* $\mathcal{L}\Big[F(t)\Big] = \dfrac{s^2}{s^2+2s+7}$.

Solución:

$\lim_{s\to\infty} \dfrac{s^2}{s^2+2s+7} = 1 \neq 0$ y, por lo tanto, no puede ser la transformada de Laplace de ninguna función, ya que no se verifica el teorema de comportamiento en el infinito.

------ o ------

1.2. Transformada inversa de Laplace

En la práctica, es de vital importancia el poder recuperar $F(t)$ a partir de su transformada de Laplace $f(s) = \mathcal{L}\Big[F(t)\Big]$. Para ello, se define la transformada inversa de Laplace y se denota por $\mathcal{L}^{-1}\Big[f(s)\Big]$, a la función $F(t)$ tal que $\mathcal{L}\Big[F(t)\Big] = f(s)$.

Transformadas inversas de Laplace de las funciones elementales

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = \mathrm{e}^{at} \qquad s > a$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!} \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{x+1}}\right] = \frac{t^x}{\Gamma(x+1)} \qquad x > -1\ ;\ s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{\operatorname{sen}(at)}{a} \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at) \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right] = \frac{\operatorname{senh}(at)}{a} \qquad s > |a|$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \cosh(at) \qquad s > |a|$$

Propiedades de la transformada inversa de Laplace

Sean $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[f(s)\Big]$ y $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[g(s)\Big]$.

- $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal, es decir, $\mathcal{L}^{-1}\Big[a\,f(s) + b\,g(s)\Big] = a\,F(t) + b\,G(t)$
- Traslación: $\mathcal{L}^{-1}\Big[\mathrm{e}^{-as}f(s)\Big] = H(t)$ siendo $H(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
- Cambio de escala: $\mathcal{L}^{-1}\Big[f(as)\Big] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{t}{a}\right)$
- Transformada de la integral: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{f(s)}{s}\right] = \displaystyle\int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u$
- Multiplicación por potencias de t: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\mathrm{d}^n f(s)}{\mathrm{d}s^n}\right] = (-1)^n t^n F(t)$
- División por t: $\mathcal{L}^{-1}\left[\displaystyle\int_s^\infty f(u)\,\mathrm{d}u\right] = \dfrac{F(t)}{t}$

- Multiplicación por exponenciales: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\Big[f\,(s-\alpha)\Big] = e^{\alpha t}\,F(t)$
- Convolución: Si $F * G = \displaystyle\int_0^t F(u)G(t-u)\,du$ entonces $\mathcal{L}^{-1}\Big[f(s)\cdot g(s)\Big] = F * G$

Ejemplo 1.6

Calcular:

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s}{s^2+4} - \dfrac{5}{s-7}\right]$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s\,(s^2+9)}\right]$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right)\right]$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left[\displaystyle\int_s^\infty \dfrac{1}{u^2-36}\,du\right]$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2+9}\right]$

Solución:

(a) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{s^2+4} - \frac{5}{s-7}\right] = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-7}\right] = 3\,\cos(2t) - 5\,e^{7t}$$

(b) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s^2+9)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s^2+9}}{s}\right] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]du = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(3u)}{3}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{\cos(3u)}{3}\right]_0^t = -\frac{1}{9}\Big(\cos(3t) - \cos 0\Big) = -\frac{1}{9}\Big(\cos(3t) - 1\Big)$$

Otra forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s^2+9)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{\operatorname{sen}(3t)}{3} * 1$$

$$= \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(3u)}{3}\cdot 1\,du = \cdots = -\frac{1}{9}\Big(\cos(3t) - 1\Big)$$

(c) Tenemos $\left[\ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right)\right]' = \Big[\ln(s+1) - \ln s\Big]' = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s}$ y, así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\left[\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right]'\right] &= (-1)^1\, t^1\, \mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right] \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right] &= -t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right] \\
\mathrm{e}^{-t}-1 &= -t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right]
\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right] = \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{-t}}$$

(d) $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}\frac{1}{u^2-36}\,\mathrm{d}u\right]} = \frac{\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{u^2-36}\right]}{t} = \frac{\dfrac{\operatorname{senh}(6t)}{6}}{t} = \boxed{\frac{\operatorname{senh}(6t)}{6t}}$$

(e) $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+9}\right]} = \mathrm{e}^{2t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \boxed{\mathrm{e}^{2t}\,\frac{\operatorname{sen}(3t)}{3}}$$

------ o ------

Cálculo de la transformada inversa de Laplace de funciones racionales

Si $f(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ (cociente de polinomios), debido al teorema del comportamiento en el infinito, la transformada inversa existirá siempre que el grado del polinomio del numerador $P(s)$ sea menor que el grado del denominador $Q(s)$, y la forma de calcular dicha transformada inversa consistirá en descomponer en fracciones simples $f(s)$, para posteriormente, utilizando la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$, obtener $\mathcal{L}^{-1}\left[f(s)\right]$ como suma de las transformadas inversas de cada fracción simple.

Ejemplo 1.7

Calcular la transformada inversa de Laplace de $f(s)=\dfrac{s^6-2s^3+5s-1}{(s-2)(s-3)^2\,(s^2+4)\,(s^2-4s+8)}$ *dejando indicados los coeficientes de la descomposición en fracciones simples.*

Solución:

$$\begin{aligned}
f(s) &= \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{(s-3)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+4}+\frac{Fs+G}{s^2-4s+8} \\
&= \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{(s-3)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+4}+\frac{Fs+G}{(s-2)^2+4} \\
&= \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{(s-3)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+4}+\frac{F(s-2)+G+2F}{(s-2)^2+4} \\
&= A\,\frac{1}{s-2}+B\,\frac{1}{s-3}+C\,\frac{1}{(s-3)^2}+D\,\frac{s}{s^2+4}+E\,\frac{1}{s^2+4}+F\,\frac{s-2}{(s-2)^2+4} \\
&\quad +(G+2F)\,\frac{1}{(s-2)^2+4}
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big[f(s)\Big] &= A\,e^{2t}+B\,e^{3t}+C\,t\,e^{3t}+D\cos(2t)+\frac{E}{2}\operatorname{sen}(2t)+F\,e^{2t}\cos(2t) \\
&\quad +\frac{G+2F}{2}\,e^{2t}\operatorname{sen}(2t)
\end{aligned}$$

- - - - - - ◦ - - - - - -