Apellidos:

Nombre: D.N.I.:

Segunda prueba de evaluación continua

Ampliación de Cálculo. E.P.S.

Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo del Producto–B (2–06–11)

1. (2 p.) Resolver la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Laplace

$$y'' + 2y' = e^{2x}, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1.$$

2. a) (1.5 p.) Comprueba si la siguiente ecuación de Pfaff es integrable y en caso afirmativo resuélvela

$$(z - x - 2y)dx + (x + z)dy - 2(x + y)dz = 0.$$

   b) (0.5 p.) Considera el campo de vectores $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z - x - 2y, x + z, -2(x + y))$. Encuentra, si es posible, la superficie que admite a $\overrightarrow{F}$ como campo normal y contiene al punto $P = (1, 0, 0)$.

3. a) (1.5 p.) Hallar la solución particular de la ecuación $yp - xq = 2xyz$ que contiene a la recta $x = y = z$.

   b) (0.5 p.) ¿Existe alguna curva integral del campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y, -x, 2xyz)$ que empezando en algún punto de la recta $x = y = z$ pase por el punto $(1, 2, 3)$?

4. (2 p.) Resolver la ecuación del calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ para $0 < x < \pi$ y $t > 0$. Con $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para $t > 0$ y codición inicial $u(x, 0) = x$ para $x > 0$ (longitud $L = \pi$).

Málaga 22-6-11

Problema 3.

$$F(t) = \frac{e^{2at}}{\sqrt[3]{t}} \qquad \mathcal{L}\left[\frac{e^{2at}}{\sqrt[3]{t}}\right]$$

$$e^{2at}\frac{1}{\sqrt[3]{t}} = e^{2at}t^{-1/3} ; \quad \frac{\pi^{2/3}}{s^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\sqrt{s}}(s-2a) = \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\sqrt[3]{(s-2a)^2}}$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right](s-2a) = \mathcal{L}[t^{-1/3}](s-2a)$$

$$= \frac{\Gamma(2/3)}{(s-2a)^{2/3}} = \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt[3]{(s-2a)^2}}$$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

2.b

$\int_0^{+\infty} F(t)\,dt$ donde $F(t) = e^{-2t}\int_0^t \frac{\cos 2x - \cos x}{2x}\,dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-2t}\int_0^t$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2t}\left[\int_0^t \frac{\cos 2x - \cos x}{2x}\,dx\right]dt$$

$$\lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left[e^{-2t}\int_0^t \frac{\cos 2x - \cos x}{2x}\,dx\right](s)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\int_0^t \frac{\cos 2x - \cos x}{2x}\,dx\right]$$

$$\frac{\mathcal{L}\left[\frac{\cos 2x - \cos x}{2x}\right]}{s}(s+2) ; \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos 2t - \cos t}{2t} = \frac{1-1}{0} \text{ IND}$$

$$\to \text{L'H} = \frac{-2\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\int_s^\omega \mathcal{L}[\cos 2t](u) - \mathcal{L}[\cos t](u)\, du = \int_s^\omega \frac{u}{u^2+4}\, du - \int_s^\omega \frac{u}{s^2+1}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+4)\Big]_s^\omega - \Big[\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big]_s^\omega = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big(\frac{u^2+4}{u^2+1}\Big)\Big]_s^\omega$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}$$

solución:

*El 1/2 no lo ha tenido en cuenta entonces:

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(s+2)^2+1}{(s+2)^2+4}\right]}{(s+2)} = \frac{1}{4}\,\frac{\ln\left[\frac{4+1}{4+4}\right]}{2} = \frac{1}{8}\ln\left[\frac{5}{8}\right]$$

propuestos

5.e $y' = (x-y+5)^4 \to \frac{dy}{dx} = (x-y+5)^4$

$$dy = (x-y+5)^4\, dx$$

$$t = x-y+5$$

$$dt = dx - dy \to dy = -dt + dx$$

$$t^4\, dx + dt - dx = 0$$

$$(t^4-1)\, dx + dt = 0$$

$$dx + \frac{1}{t^4-1}\, dt = 0$$

$$\int \frac{1}{t^4-1}\, dt$$

$$\frac{1}{t^4-1} = \frac{1}{(t^2+1)(t+1)(t-1)}$$