Ampliación de Cálculo de la Escuela Politécnica Superior

Relación de repaso

1. Calcular $\mathcal{L}[F(t)]$ siendo $F(t)$:

   (a) $F(t) = t^{17}\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\cos(5t)$ (b) $F(t) = t^2\mathrm{sen}(3t) + \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t}$ (c) $F(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2at}}{\sqrt[3]{t}}$

2. Calcular las integrales impropias $\displaystyle\int_0^{\infty} F(t)\, \mathrm{d}t$ siendo $F(t)$:

   (a) $F(t) = \dfrac{\cos(2t) - \cos t}{2t}$ (b) $F(t) = \mathrm{e}^{-2t}\displaystyle\int_0^t \frac{\cos(2x) - \cos x}{2x}\, \mathrm{d}x$

3. Calcular las transformadas inversas $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ siendo $f(s)$:

   (a) $\dfrac{2s+5}{s^2+2s+9}$ (b) $\ln\left(\dfrac{s+5}{s-2}\right)$ (c) $\dfrac{1}{(s-1)^2(s+2)(s-3)}$ (d) $\dfrac{s^4}{(s+1)^2(s-6)(s+113)}$

4. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $x\, \mathrm{d}x + 2y^2\, \mathrm{d}y = 0$ (b) $y^2\, \mathrm{d}x - 3x\, \mathrm{d}y = 0$

   (c) $y' = (-3x+3y)^2$ (d) $(3y - 7x + 7)\, \mathrm{d}x + (7y - 3x + 3)\, \mathrm{d}y = 0$

   (e) $\left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}x = 2xy\, \mathrm{d}y$ (f) $(x + y + 2)\, \mathrm{d}x + (2x + 2y + 4)\, \mathrm{d}y = 0$

   (g) $(x + y + 1)\, \mathrm{d}x + (x + y - 3)\, \mathrm{d}y = 0$ (h) $\big(3x^2 + 2y\,\mathrm{sen}(2x)\big)\, \mathrm{d}x + \big(-\cos(2x) + 3y^2\big)\, \mathrm{d}y = 0$

   (i) $y' + 2xy = 4x$ (j) $\big(2xy^2 + y\big)\, \mathrm{d}x + \big(x + 2x^2y - x^4y^3\big)\, \mathrm{d}y = 0$ con $\mu = \mu(xy)$

   (k) $y' - y = xy^5$ (l) $3y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{y^2}$

   (m) $(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$ (n) $y' + xy^2 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ con $y_p = \dfrac{1}{x}$

5. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

   (a) $y' + 2xy = 4x;\quad y(0) = 3$ (b) $(x + y + 2)\, \mathrm{d}x + (2x + 2y + 4)\, \mathrm{d}y = 0;\quad y(0) = 0$

   (c) $y^2\, \mathrm{d}x - 3x\, \mathrm{d}y = 0;\quad y(1) = 0$ (d) $(x + y + 2)\, \mathrm{d}x + (2x + 2y + 4)\, \mathrm{d}y = 0;\quad y(1) = -3$

6. Resolver, utilizando transformadas de Laplace, $\begin{cases} y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

7. ¿Cuál es el orden mínimo de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes homogénea que tenga, entre otras, las siguientes funciones como soluciones?: $\{\ 2x^3\ ,\ \mathrm{e}^x\cos(-2x)\ ,\ -7\mathrm{e}^x\ ,\ 0\ \}$. Construir dicha ecuación diferencial y obtener su solución general.

8. Resolver la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2x} + 3x$ utilizando el método de Lagrange para el cálculo de la solución particular.

9. Resolver la ecuación diferencial $y^{VI} + y^{V} - 5y^{IV} - 3y''' + 2y'' - 4y' + 8y = 2\mathrm{e}^{x} - 5\mathrm{e}^{3x} + 2x - 5$.

10. Resolver la ecuación diferencial $y^{IV} - 26y'' + 25y = 3\cos x - 3\,\mathrm{sen}(2x)$.

11. Resolver la ecuación diferencial $y^{IV} + 2y'' + y = 3\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x$.

12. Resolver, utilizando transformadas de Laplace, $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2\mathrm{e}^{x} \\ y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 2 \end{cases}$

13. Resolver, utilizando transformadas de Laplace, el sistema: $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 2y \\ x(0) = 6 \ ; \ y(0) = 4 \end{cases}$

14. Verificar si son integrables las siguientes ecuaciones de Pfaff. En caso afirmativo resolverlas.
    (a) $2yz\,\mathrm{d}x + 3xz\,\mathrm{d}y - 5xy\,\mathrm{d}z = 0$
    (b) $\mathrm{e}^{x}yz\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{x}z\,\mathrm{d}y + (\mathrm{e}^{x}y + 1)\,\mathrm{d}z = 0$
    (c) $2y^3\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z = 0$
    (d) $(xyz + yz)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$
    (e) $(x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y + (x + z)\,\mathrm{d}z = 0$
    (f) $(3xy + \beta yz)\,\mathrm{d}x + x(x + z)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \beta \in \mathbb{R}$

15. Calcular la solución general de:
    (a) $\left(x^2 + 1\right)p + 2\left(y^2 + 1\right)q = 1$
    (b) $x^2p - y^2q = (x - y)z$
    (c) $\left(y^2 - z^2\right)p + \left(z^2 - x^2\right)q = x^2 - y^2$

16. Hallar la solución particular de la ecuación $xp + yq = 0$ que contiene a la curva $y^2 + z^2 = 1 \ ; \ x = 1$.

17. Calcular una integral completa de cada una de las siguientes EDP:
    (a) $z - px - qy = p^2 - q^3$
    (b) $p^2 - q = 5$
    (c) $2py^2 - q^2z = 0$
    (d) $p^2x + qy = 0$

18. Ecuación del flujo del calor: $\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 & 0 < x < L \qquad t > 0 \\ u(0,t) = 0 & u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$

    Resolver la ecuación mediante los siguientes pasos:

    (a) Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \qquad 0 < x < L \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

(b) Aplicar la condición $u(x,0) = f(x)$ con $0 < x < L$ a la función $u(x,t)$ obtenida en el apartado anterior para obtener la solución de la ecuación del flujo del calor.

19. Resolver la ecuación del flujo del calor, siendo $L = \pi$, en los siguientes casos:

(a) $f(x) = 5 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}(2x)$ (b) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -2 & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

20. Ecuación de onda: $\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 < x < L & t > 0 \\ u(0,t) = 0 & u(L,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$

Resolver la ecuación mediante los siguientes pasos:

(a) Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema:

$$\begin{array}{lll} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 < x < L & t > 0 \\ u(0,t) = 0 & u(L,t) = 0 & t \geq 0 \end{array}$$

(b) Aplicar las condiciones $u(x,0) = f(x)$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ con $0 < x < L$ a la función $u(x,t)$ obtenida en el apartado anterior para obtener la solución de la ecuación de onda.

21. Resolver la ecuación de onda, siendo $L = \pi$, en los siguientes casos:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen}(2x)$; $g(x) = x$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$; $g(x) = 4 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}(2x) + 5 \operatorname{sen}(4x)$

Soluciones

1. (a) $\dfrac{17!}{(s-2)^{18}} + \dfrac{s+2}{(s+2)^2 + 25}$ (b) $\dfrac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3} + \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$ (c) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{(s-2a)^{\frac{2}{3}}}$

2. (a) $\ln \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ (b) $\ln \sqrt[8]{\dfrac{5}{8}}$

3. (a) $e^{-t}\left(2\cos\left(2\sqrt{2}t\right) + \dfrac{3\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{2}t\right)}{4}\right)$ (b) $\dfrac{e^{2t}}{t} - \dfrac{e^{-5t}}{t}$ (c) $\dfrac{e^{3t}}{20} - e^t\left(\dfrac{t}{6} + \dfrac{1}{36}\right) - \dfrac{e^{-2t}}{45}$

(d) No existe ya que $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 1 \neq 0$

4. (a) $3x^2+4y^3=C$ (b) $\ln x+\dfrac{3}{y}=C$

(c) $\ln\sqrt{\dfrac{-3x+3y-1}{-3x+3y+1}}=3x+C$ (d) $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C$

(e) $y^2-x^2=Cx$ (f) Solución singular $x+y+2=0$; Solución general $x+2y=C$

(g) $(x+y)^2+2x-6y=C$ (h) $x^3-y\cos(2x)+y^3=C$

(i) $y=C\,\mathrm{e}^{-x^2}+2$ (j) $\mu=\dfrac{1}{x^4y^4}$; $\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{1}{3x^2y^3}+\ln y=C$

(k) $y^4=\dfrac{1}{C\,\mathrm{e}^{-4x}-x+\dfrac{1}{4}}$ (l) $y^3=C\,\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

(m) $y=2x^2+C_1$; $y=-x^2+C_2$ (n) Solución singular $y=\dfrac{1}{x}$; Solución general $y=\dfrac{1}{C\,\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{x}$

5. (a) $y=\mathrm{e}^{-x^2}+2$ (b) $x+2y=0$ (c) Sin solución (d) $x+y+2=0$; $x+2y=-5$

6. $y=\mathrm{e}^x$

7. Orden mínimo 7. Ecuación: $y^{VII}-3y^{VI}+7y^{V}-5y^{IV}=0$.
Solución: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5\,\mathrm{e}^x+C_6\,\mathrm{e}^x\cos(2x)+C_7\,\mathrm{e}^x\operatorname{sen}(2x)$

8. $y=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3}{4}$

9. $y=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{2x}+C_3\,\mathrm{e}^{-2x}+C_4\,x\,\mathrm{e}^{-2x}+C_5\cos x+C_5\operatorname{sen} x-\dfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^x\,x-\dfrac{1}{100}\,\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}$

10. $y=C_1\,\mathrm{e}^{5x}+C_2\,\mathrm{e}^{-5x}+C_3\,\mathrm{e}^x+C_4\,\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{3\cos x}{52}-\dfrac{3\operatorname{sen}(2x)}{145}$

11. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+C_3\,x\cos x+C_4\,x\operatorname{sen} x-\dfrac{3x^2\cos x}{8}+\dfrac{x^2\operatorname{sen} x}{4}$

12. $y=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^4}{12}+2x\right)$

13. $x=4\mathrm{e}^{4t}+2\mathrm{e}^{-t}$; $y=6\mathrm{e}^{4t}-2\mathrm{e}^{-t}$

14. (a) $x^2y^3=Cz^5$ (b) $\mathrm{e}^xyz+z=C$ (c) $2xy^2-z=Cy^2$

(d) $\ln(xyz)+x=C$ (e) No es integrable (f) Integrable para $\beta=2$. $x^2yz+x^3y=C$

15. φ función arbitraria.

(a) $\varphi\left(\arctan x-z,\arctan y-2z\right)=0$ (b) $\varphi\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\dfrac{xy}{z}\right)=0$ (c) $\varphi\left(x+y+z,x^3+y^3+z^3\right)=0$

16. $x^2z^2=x^2-y^2$

17. (a) $z=C_1x+C_2y+C_1^2-C_2^3$ (b) $z=C_1x+\left(C_1^2-5\right)y+C_2$

(c) $\dfrac{z^2}{2}=C_1x+\dfrac{y^2}{2}\sqrt{2C_1}+C_2$ (d) $z=2\sqrt{C_1x}-C_1\ln y+C_2$

18. (a) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$

(b) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}$ con $A_n = \displaystyle\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\,\mathrm{d}x$

19. (a) $u(x,t) = 5\operatorname{sen} x\,\mathrm{e}^{-kt} - 3\operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{e}^{-4kt}$

(b) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\,x)\ \mathrm{e}^{-n^2kt}$ con $A_n = \displaystyle\frac{6+4(-1)^n}{n\pi} - \frac{10\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$

20. (a) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)$

(b)
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right) + B_n\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}\,t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \quad \text{con} \\ A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

21. (a) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(ant) + B_n\operatorname{sen}(ant)\Big)\operatorname{sen}(nx)$ con

$A_1 = 1\ ,\ A_2 = 3\ ,\ A_n = 0$ para $n \neq 1,2$; $B_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{an^2}$

(b) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(ant) + B_n\operatorname{sen}(ant)\Big)\operatorname{sen}(nx)$ con

$A_n = \dfrac{4}{n^2\pi}\operatorname{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$; $B_1 = \dfrac{4}{a}\ ,\ B_2 = -\dfrac{1}{a}\ ,\ B_4 = \dfrac{5}{4a}\ ,\ B_n = 0$ para $n \neq 1,2,4$