Ampliación de Cálculo de la Escuela Politécnica Superior

Resolución del cuestionario 1. Transformada de Laplace

Indique si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**. **Razone** siempre **la respuesta** y en **caso necesario indique cuál sería la respuesta correcta**.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^4}{(s-1)(s+1)(s+2)}\right]$ no existe.

   Solución:
   Verdadero.

   Recordemos que una condición necesaria para que exista la transformada inversa de Laplace de una función $f(s)$ es que $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 0$. Sin embargo, como el grado del numerador es 4 y el del denominador es 3, se tiene que $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s^4}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \infty \neq 0$ y, por lo tanto, no existe la transformada inversa de Laplace de la función dada. $\square$

2. $\displaystyle\int_0^\infty t^7\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty} \frac{7!}{(s+1)^8} = 0.$

   Solución:
   Falso.

   Recordemos que $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\left[F(t)\right]$ siempre que dicha transformada y dicho límite existan.

   En este caso, teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\left[t^7\,\mathrm{e}^{-t}\right] = \dfrac{7!}{(s+1)^8}$, el error está en calcular el límite cuando s tiende a infinito en lugar de cero. Por tanto, la solución correcta es:

   $$\int_0^\infty t^7\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \frac{7!}{(s+1)^8} = 7! = 5040$$

   $\square$

3. Sabiendo que $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos(3x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2+9}}{s+1}\right)}{s}$ entonces

   $$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos(3x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{(s+1)^2+9}}{s+2}\right)}{s+1}$$

Solución:
Verdadero.

Se ha aplicado la propiedad siguiente:
Si $f(s)=\mathcal{L}\left[F(t)\right]$ entonces $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\alpha t}\,F(t)\right]=f(s-\alpha)$. $\square$

4. Sabiendo que $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\right]=\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{(s+1)^2+4}}{s+1}\right)}{s+1}$ entonces

$$\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\ln\sqrt[4]{5}$$

Solución:
Verdadero.

Recordemos que $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{s\to 0^+}\mathcal{L}\left[F(t)\right]$ siempre que dicha transformada y dicho límite existan.

En este caso, teniendo en cuenta la información que nos dan:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t &= \lim_{s\to 0^+}\mathcal{L}\left[F(t)\right]=\lim_{s\to 0^+}\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\ &= \lim_{s\to 0^+}\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{(s+1)^2+4}}{s+1}\right)}{s+1}=\frac{1}{2}\ln\sqrt{5}=\ln\sqrt[4]{5}\end{aligned}$$

$\square$

5. Sabiendo que $f(s)=\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\right]=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s}{s}$ y
$f'(s)=\dfrac{2\left(s^2+1\right)\operatorname{arctg} s-\pi s^2-2s-\pi}{2s^2\left(s^2+1\right)}$ entonces

$$\mathcal{L}\left[t\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{2\left(s^2+1\right)\operatorname{arctg} s-\pi s^2-2s-\pi}{2s^2\left(s^2+1\right)}$$

Solución:
Falso.

Recordemos que si $f(s)=\mathcal{L}\left[F(t)\right]$ entonces $\mathcal{L}\left[t^n\,F(t)\right]=(-1)^n f^{(n)}(s)$.
En este caso podemos aplicar dicha propiedad para $n=1$, por lo que el error está en que falta un signo menos. Esto es:

$$\mathcal{L}\left[t\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\right]=(-1)^1 f'(s)=-\frac{2\left(s^2+1\right)\operatorname{arctg} s-\pi s^2-2s-\pi}{2s^2\left(s^2+1\right)}$$

$\square$

6. Sabiendo que $\mathcal{L}\left[\dfrac{1-\cosh x}{x}\right] = \ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2-1}}{s}\right)$ entonces $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \dfrac{1-\cosh x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2-1}}{s}\right)}{s}$.

Solución:
Verdadero.

Se ha aplicado la propiedad siguiente:

Si $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$ entonces $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u\right] = \dfrac{f(s)}{s}$.

□

7. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^3+1}{s(s-1)(s+2)}\right] = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^t - \dfrac{7}{6}\,\mathrm{e}^{-2t}$

Solución:
Falso.

Recordemos que una condición necesaria para que exista la transformada inversa de Laplace de una función $f(s)$ es que $\displaystyle\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$. Sin embargo, como el grado del numerador es 3 y el del denominador es 3, se tiene que $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \dfrac{s^3+1}{s(s-1)(s+2)} = 1 \neq 0$ y, por lo tanto, no existe la transformada inversa de Laplace de la función dada.

El hecho que puede inducir a pensar que la respuesta sea correcta sería el siguiente razonamiento erróneo:

$$\frac{s^3+1}{s(s-1)(s+2)} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2} = \frac{-1/2}{s} + \frac{2/3}{s-1} + \frac{7/6}{s+2}$$

El paso erróneo es que al ser el grado del numerador (3) mayor o igual que el grado del denominador (3) no existen valores para los coeficientes A, B y C que hagan cierta esa descomposición en fracciones simples.

□

8. La integral $\displaystyle\int_0^\infty t^n\,\mathrm{d}t$ es divergente.

Solución:
Verdadero.

Recordemos que $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}[F(t)]$ siempre que dicha transformada y dicho límite existan.

En este caso, teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, se tendría que

$$\int_0^\infty t^n\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}[F(t)] = \lim_{s\to 0^+} \frac{n!}{s^{n+1}} = \infty$$

y, por lo tanto, la integral es divergente. □

9. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-1)^2+4}\right] = \mathrm{e}^t\cos(2t)$.

Solución:
Falso.

Sabemos que si $F(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ entonces $\mathcal{L}^{-1}[f(s-\alpha)] = \mathrm{e}^{\alpha t}F(t)$.
El denominador $(s-1)^2+4$ sugiere una traslación con $\alpha = 1$, pero si observamos el numerador vemos que la variable s no tiene esa traslación. Por lo tanto la respuesta dada es falsa.

La respuesta correcta sería:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)^2+4}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1+1}{(s-1)^2+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{(s-1)^2+4}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right] = \mathrm{e}^t\cos(2t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,(2t)
\end{aligned}$$

□