Ampliación de Cálculo de la Escuela Politécnica Superior

Resolución del cuestionario 2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Indique si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**. **Razone** siempre **la respuesta** y en **caso necesario indique cuál sería la respuesta correcta**.

1. La solución general de la ecuación diferencial $\left(x^2+2x-14\right)\,\mathrm{d}x+\left(3y-y^3\right)\,\mathrm{d}y=0$ es $\dfrac{x^3}{3}+x^2-14x+\dfrac{3y^2}{2}-\dfrac{y^4}{4}=0.$

   Solución:
   Falso.
   Recordemos que en la solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden siempre aparece una constante arbitraria. Por lo tanto la expresión dada no puede ser la solución general de la ecuación.

   La solución correcta sería

$$\int\left(x^2+2x-14\right)\,\mathrm{d}x+\int\left(3y-y^3\right)\,\mathrm{d}y=C\implies\frac{x^3}{3}+x^2-14x+\frac{3y^2}{2}-\frac{y^4}{4}=C$$

□

2. La función $y=3x^4$ es la única solución del problema de Cauchy $\begin{cases} y'-\dfrac{2y}{x}=6x^3\\ y(0)=0\end{cases}$

   Solución:
   Falso.

$$y=3x^4\implies y'=12x^3\implies\underbrace{12x^3}_{y'}-\frac{2\cdot\overbrace{3x^4}^{y}}{x}=6x^3\implies 12x^3-6x^3=6x^3$$

   y, por lo tanto, la función $y=3x^4$ verifica la ecuación diferencial. Además, como $3\cdot 0^4=0$, la función $y=3x^4$ también verifica la condición inicial dada. Este hecho asegura que la función es solución del problema de Cauchy pero no garantiza que sea la única solución. De hecho podemos observar que, por ejemplo, la función $y=-x^2+3x^4$ también es solución del problema de Cauchy dado. □

3. La solución general de la ecuación diferencial $\left(x+y^2\right)\,\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=0$ es

$$\int\left(x+y^2\right)\,\mathrm{d}x+\int 2xy\,\mathrm{d}y=C$$

   Solución:
   Falso.

La ecuación diferencial dada no es de variables separadas y, por lo tanto, su solución general no se obtiene integrando la función $P(x,y)$ con respecto a la variable x y la función $Q(x,y)$ con respecto a la variable y. Para que una ecuación sea de variables separadas hace falta que presente la siguiente forma:

$$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Esta ecuación es exacta ya que se cumple que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ y, por lo tanto, su solución general se obtiene igualando la función potencial de la forma diferencial exacta a una constante arbitraria.

Así, su solución correcta sería $\dfrac{x^2}{2} + xy^2 = C$. □

4. x^3 es un factor integrante de la ecuación diferencial $\left(x^3 + 4x - 4y - 2x^2\right)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

Solución:
Verdadero.

Al multiplicar la ecuación por la función x^3 se obtiene la ecuación diferencial

$$\left(x^6 + 4x^4 - 4x^3y - 2x^5\right)\,\mathrm{d}x - x^4\,\mathrm{d}y = 0$$

que es una ecuación diferencial exacta ya que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -4x^3 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. □

5. La función $y = 3x^2 - x$ es una solución del problema de Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + 3x \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Solución:
Verdadero.

$$y = 3x^2 - x \implies y' = 6x - 1 \implies \underbrace{6x-1}_{y'} = \frac{\overbrace{3x^2 - x}^{y}}{x} + 3x \implies 6x - 1 = 3x - 1 + 3x$$

y, por lo tanto, la función $y = 3x^2 - x$ verifica la ecuación diferencial. Además, como $3 \cdot 1^2 - 1 = 2$, la función $y = 3x^2 - x$ también verifica la condición inicial. Así se tiene que es solución del problema de Cauchy. □

6. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{2}$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal $y' - 2y = \mathrm{e}^{4x}$.

Solución:
Verdadero.

Como

$$y = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{2} \implies y' = 2\mathrm{e}^{4x} \implies \underbrace{2\mathrm{e}^{4x}}_{y'} - 2\,\overbrace{\frac{\mathrm{e}^{4x}}{2}}^{y} = \mathrm{e}^{4x} \implies \mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{4x}$$

la función dada verifica la ecuación diferencial dada y, por lo tanto, es solución particular de dicha ecuación. □

7. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no puede ser a la vez homogénea y exacta.

Solución:
Falso.

No hay ninguna razón para que una ecuación diferencial no pueda ser homogénea y exacta a la vez. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$(x+y)\ \mathrm{d}x + (x+2y)\,\mathrm{d}y = 0$$

es una ecuación diferencial exacta ya que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ y, además, es homogénea ya que las funciones $x+y$ y $x+2y$ son funciones homogéneas de grado 1. □

8. La función $y = 4\mathrm{e}^x - x - 3$ es una solución del problema de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' = x+y+2 \\ \\ y(0) = 2 \end{array}\right.$

Solución:
Falso.

$$y = 4\mathrm{e}^x - x - 3 \implies y' = 4\mathrm{e}^x - 1 \implies \underbrace{4\mathrm{e}^x - 1}_{y'} = x + \underbrace{4\mathrm{e}^x - x - 3}_{y} + 2 \implies 4\mathrm{e}^x - 1 = 4\mathrm{e}^x - 1$$

y, por lo tanto, la función $y = 4\mathrm{e}^x - x - 3$ verifica la ecuación diferencial.

Sin embargo, como $2 \neq 4\mathrm{e}^0 - 0 - 3$, la función no verifica la condición inicial y, por lo tanto, no es solución del problema de Cauchy dado.

Para resolver el problema de Cauchy dado debemos calcular la solución general de la ecuación diferencial. Observemos que es dependiente de una recta. Por lo tanto, efectuamos el cambio $x+y+2 = z$. Así se tiene que $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = \mathrm{d}z$. Sustituyendo en la ecuación queda

$$\begin{aligned}
y' = x+y+2 \quad &\implies \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x+y+2 \implies \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = z \implies \mathrm{d}z = (z+1)\,\mathrm{d}x \\
&\implies \quad \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = \mathrm{d}x \implies \int \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = \int \mathrm{d}x + C \implies \ln(z+1) = x + \ln C \\
&\implies \quad z+1 = \mathrm{e}^{x+\ln C} \implies z+1 = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\ln C} \implies z+1 = C\mathrm{e}^x \\
&\implies \quad z = C\mathrm{e}^x - 1 \implies x+y+2 = C\mathrm{e}^x - 1 \implies y = C\mathrm{e}^x - x - 3
\end{aligned}$$

Sustituyendo la condición inicial $y(0) = 2$ queda $2 = C\mathrm{e}^0 - 0 - 3 \implies C = 5$ y, por lo tanto, la única solución del problema de Cauchy dado es $y = 5\mathrm{e}^x - x - 3$. □

9. La ecuación diferencial $y^2 y' + \dfrac{y^3}{x} = x^2$ es una ecuación diferencial de Bernouille.

Solución:
Verdadero.

Recordemos que la forma general de una ecuación diferencial de Bernouille es

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \quad ; \quad n \neq 0, 1$$

Al dividir la ecuación por la función y^2 se obtiene la ecuación

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^2}$$

que es una ecuación diferencial de Bernouille con $P(x) = \dfrac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$ y $n = -2$.

Recordemos que con el cambio $z = \dfrac{1}{y^{n-1}} = y^3$ se reduce a una ecuación diferencial lineal.

$\square$

10. Con la traslación $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$ la ecuación $(x + 3y + 2)\ \mathrm{d}x + (2x - 3y - 5)\ \mathrm{d}y = 0$ se reduce a una ecuación homogénea.

Solución:
Verdadero.

La rectas $\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$ son secantes y se cortan en el punto $(1, -1)$.

Por lo tanto, con esa traslación conseguimos que las dos rectas se corten en el punto $(0, 0)$ y que sus ecuaciones se conviertan en $\begin{cases} X + 3Y = 0 \\ 2X - 3Y = 0 \end{cases}$ y, así, la ecuación diferencial se convierte en

$$(X + 3Y)\ \mathrm{d}X + (2X - 3Y)\ \mathrm{d}Y = 0$$

Esta ecuación ya es homogénea porque las funciones $X + 3Y$ y $2X - 3Y$ son funciones homogéneas de grado 1.

Recordemos que con el cambio $Y = tX$ se reduce a una ecuación diferencial de variables separables. $\square$

11. La función $y = -\dfrac{x + 9}{9}$ es la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} (x + y + 1)^2\ \mathrm{d}x + (3x + 3y + 3)^2\ \mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Solución:
Falso.

$$(x + y + 1)^2\ \mathrm{d}x + (3x + 3y + 3)^2\ \mathrm{d}y = 0 \implies (x + y + 1)^2 + (3x + 3y + 3)^2\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\implies (x + y + 1)^2 + (3x + 3y + 3)^2\ y' = 0$$

$$y = -\frac{x+9}{9} \implies y' = -\frac{1}{9} \implies \left(x - \frac{x+9}{9} + 1\right)^2 + \left(3x + 3\left(-\frac{x+9}{9}\right) + 3\right)^2 \left(-\frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\implies \left(\frac{9x - x - 9 + 9}{9}\right)^2 + \left(\frac{9x - x - 9 + 9}{3}\right)^2 \left(-\frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\implies \left(\frac{8x}{9}\right)^2 + \left(\frac{8x}{3}\right)^2 \left(-\frac{1}{9}\right) = 0 \implies \frac{64x^2}{81} - \frac{64x^2}{81} = 0$$

y, por lo tanto, la función $y = -\dfrac{x+9}{9}$ verifica la ecuación diferencial. Además, como $-1 = -\dfrac{0+9}{9}$, la función $y = -\dfrac{x+9}{9}$ también verifica la condición inicial. Así se tiene que es solución del problema de Cauchy.

Sin embargo, no va ser la única solución. Recordemos que este tipo de ecuaciones (dependientes de dos rectas coincidentes) poseen una solución singular (la propia recta). Así, $x + y + 1 = 0$ es también solución de la ecuación. Además, como $0 - 1 + 1 = 0$ también verifica la condición inicial. Por lo tanto $x + y + 1 = 0$ también es solución del problema de Cauchy dado. $\square$