TRANSFORMADA DE LAPLACE

TEMA 1.

Preliminares:

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \operatorname{arctg} 0 = 0$ $\quad \operatorname{arctg} \infty = \pi/2$

Funciones hiperbólicas:

$$\operatorname{senh} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Razones trigonométricas:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2\operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}}$$

Transformada de Laplace

$$\boxed{\begin{aligned} &F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &\mathcal{L}[F(t)] = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \end{aligned}}$$

siempre que $\exists$ la integral

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \left\{ \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-st} dt & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{matrix} \right\} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{-te^{-st}}{s} - \int \frac{e^{-st}}{-s} dt \right]_0^n = \frac{1}{s^2}$$

Funciones elementales:

$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad s>0$

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad s>a$

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s>0$

$\mathcal{L}[t^x] = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad x>-1;\ s>0$

$\mathcal{L}[\operatorname{sen} at] = \frac{a}{s^2+a^2} \quad s>0$

$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad s>0$

$\mathcal{L}[\operatorname{senh} at] = \frac{a}{s^2-a^2} \quad s>|a|$

$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2} \quad s>|a|$

Propiedades:

- Operador lineal:

$$\mathcal{L}[aF(t) + bG(t)] = a f(s) + b g(s)$$

- Traslación:

$$H(t) = \begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \mathcal{L}[H(t)] = e^{-as} f(s)$$

- Cambio de escala

$$\mathcal{L}[F(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad \forall a>0$$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$

$\Gamma(n+1) = n!$

! - Transf. de la derivada

$$\mathcal{L}[F'(t)] = s f(s) - F(0)$$

! - Transf. de la integral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t F(u)\, du\right] = \frac{f(s)}{s}$$

! - Multiplicación por potencias de t:

$$\mathcal{L}[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) \quad n \geq 1$$

! · División por t

si $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t}\ \exists \rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)\,du}$

! · Multiplicación por exponenciales

si $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}[e^{\alpha t} F(t)] = f(s-\alpha)$

· convolución

si $F * G = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \rightarrow \mathcal{L}[F*G] = f(s)\cdot g(s)$

Calculo Integrales Impropias:

$$\int_0^{\infty} F(t)\,dt = \lim_{s\to 0^+} \int_0^t e^{-st} F(t)\,dt = \lim_{s\to 0^+} f(s)$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} F(t)\,dt = \lim_{s\to 0} f(s)}$$

Teorema sobre Transformada de Laplace

si $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$

! $\boxed{\lim_{s\to\infty} f(s) = 0}$

si $\lim_{s\to\infty} f(s)$ no es 0 $\rightarrow$ no hay $\mathcal{L}^{-1}$

- valor inicial: si $\lim_{t\to 0^+} F(t)\ \exists \rightarrow \lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{s\to\infty} s f(s)$

- valor final: si $\lim_{t\to\infty} F(t)\ \exists \rightarrow \lim_{s\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0^+} s f(s)$

Transformada inversa de Laplace

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad s>0$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} \quad s>a$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!} \quad s>0$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{x+1}}\right] = \frac{t^x}{\Gamma(x+1)} \quad s>0;\ x>-1$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{\operatorname{sen} at}{a} \quad s>0$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at \quad s>0$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right] = \frac{\operatorname{senh} at}{a} \quad s>0$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \cosh at \quad s>0$

Propiedades de la $\mathcal{L}^{-1}$

· Operador lineal:

$\mathcal{L}^{-1}[af(s)+bg(s)] = aF(t)+bG(t)$

· Traslación:

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} f(s)] = H(t) \rightarrow H(t) = \begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$

· cambio de escala:

$\mathcal{L}^{-1}[f(as)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$

· Transf. inversa de la integral:

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{f(s)}{s}\right] = \int_0^t F(u)\,du$

· Multi. por potencias de t:

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n f(s)}{ds^n}\right] = (-1)^n t^n F(t)$

· División por t:

$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_0^{\infty} f(u)\,du\right] = \frac{F(t)}{t}$

· Multiplicación por exponenciales

si $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}[f(s-\alpha)] = e^{\alpha t} F(t)$

· convolución

si $F * G = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \rightarrow \mathcal{L}^{-1}[f(s)\,g(s)] = F*G$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Ecs. de variables separadas.

$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \longrightarrow \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Ecs dependientes de una Recta:

$y' = f(ax+by+c) \longrightarrow dy = f(ax+by+c)dx$

$z = ax+by+c \quad ; \quad dz = adx + bdy$

$\rightarrow$ variables separables

Ecs. homogéneas:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$f(ax,ay) = a^m f(x,y)$

$y = tx \qquad dy = tdx + xdt$

Ecs. dependientes de dos rectas.

- Rectas coincidentes

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ — Divido por $ax+by+c=0$

$\rightarrow$ vbles separables

- Rectas paralelas

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ — $t = ax+by+C$, $dt = adx + bdy$ $\rightarrow$ vbles separables

- Rectas ~~tangentes~~ secantes

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

· se cortan en (x_0, y_0)

$x = u + x_0$, $y = v + y_0$ $\rightarrow$ $dx = du$, $dy = dv$ $\rightarrow$ Homogénea $\downarrow$ vbles u, v

Ecs. Exactas

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

· $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\exists\ u(x,y)$:

$\frac{\partial u}{\partial x} = P \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$ — $u(x,y)$ es potencial.

Ecs. de factor integrante:

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$\exists\ \mu(x,y)\ /\ \mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$

la hace exacta.

Trucos:

$\mu(t) = t^p \qquad \mu'(t) = pt^{p-1}$

$$\boxed{\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{pt^{p-1}}{t^p} = \frac{p}{t}}$$

$a\mu(x) = \mu'(x)$

$\rightarrow \mu(x) = e^{ax}$

$$\boxed{\mu'(t) = \mu(t) = e^x}$$

$\mu(t) = \ln t \rightarrow \mu'(t) = \dfrac{\frac{1}{t}}{\ln t} = \dfrac{1}{\mu(t)}$

$$\boxed{\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = c} \rightarrow \boxed{\mu(t) = e^{ct}}$$

Ecs. Lineales

acaban llevar $\cos x$ y e^x

$y' + y(Q(x)) = P(x) \rightarrow [P(x) - yQ(x)]dx - dy = 0$

Admite factor integrante $\mu = \mu(x)$

X Ecs. Bernouille

$y' + Q(x)y = P(x)y^n$

- Dividimos por y^n
- $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ $\rightarrow$ Lineal en x, z.

X Ecs. Ricati:

$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$

- Conocemos una solución particular (y_p) de la ecuación.

$y = z + y_p \rightarrow$ Bernouille

Ecs. de primer orden y de grado n con respecto y'.

$(y')^n + P_1(x,y)(y')^n + \dots + P_{n-1}(x,y)y' + P_n(x,y) = 0$

Despejamos y'

Tendremos n soluciones.

EDO DE ORDEN SUPERIOR

Se dice homogénea cuando $\Phi(x) = 0$

Polinomio característico de la Ec. Diferencial.

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

- $P(r) = 0$

$$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}$$

- $P(a \pm ib) = 0$

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\operatorname{sen} bx \dots x^{m-1}e^{ax}\cos bx,\ x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx$$

En el caso que tengamos:

$$a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0 y = \Phi(x)$$

se hace homogénea y se busca la solución particular

$$B = \{y^h, y_2^h \dots y$$

$$y(x) = \{\underbrace{c_1 y^h + c_2 y_2^h \dots}_{\text{solución general de la homogénea}} + \underbrace{y^p}_{\text{solución particular de la ec. completa}}\}$$

Método de variación de constantes (Lagrange).

$$\begin{pmatrix} y_1^h & \dots & y_n^h \\ & \vdots & \\ y_1^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Phi \end{pmatrix}$$

Método de coef. indeterminados.

$$\Phi(x) = e^{\alpha x}\, Q_m(x) \operatorname{sen} \beta(x)$$

$$\Phi(x) = e^{\alpha x}\, Q_m(x) \cos \beta(x)$$

Tomo $z = \alpha + \beta i$

$$P(\alpha + \beta i) = \begin{cases} \neq 0 \rightarrow \tilde{y}_p(x) = e^{(\alpha + i\beta)x} R_m(x) \\ = 0 \rightarrow \tilde{y}_p(x) = x^k e^{(\alpha + i\beta)x} R_m(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s \cdot \mathcal{L}[y(t)](s) - y(0)$$

ECUACIONES DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuación de Pfaff.

"La familia de superficies de $S_K \equiv U(x,y,z) = K$ existe si y sólo si $\bar{F} \cdot \text{rot}(\bar{F}) = 0$".

$$\text{rot}\,\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Pasos a seguir:

1. comprobar $\bar{F}\,\text{rot}\,\bar{F} = 0$
2. Tomar una constante y calcular de esa constante.
3. comprueba que $\nabla \bar{U} \propto \bar{F}$ y de
4. Obtenemos $U(x,y,z) = K$ que

MÉTODO GENERAL DE INTEGRACIÓN DE E. PFAFF.

1) Vble. como const.
$dz = 0$
Función potencial $G(x,y,z)$
$dG(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy$

2) Factor integrante $\mu(x,y,z)$
$$\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x} = \mu(x,y,z)\,P(x,y,z)$$

3) Resolver
$\rightarrow dG + K(G,z)\,dz = 0$
$$K(G,z) = \mu(x,y,z)\,R - \frac{\partial G}{\partial z}$$

EDP cuasilineales:

$$P(x,y,z)\frac{dz}{dx} + Q(x,y,z)\frac{dz}{dy} = R(x,y,z)$$

donde $z = z(x,y) \leftrightarrow S = \{(x,y,z(x,y))\}$

Método de resolución:

$$Pp + Qq = R \rightarrow \bar{F} = (P,Q,R)\left[\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} P\,dy - Q\,dx = 0 \\ Q\,dz - R\,dy = 0 \\ R\,dx - P\,dz = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \varphi_1(x,y) = C_1 \\ \\ \rightarrow \varphi_2(x,z) = C_2 \end{array} \Bigg\} \Phi(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,z))$$

con Φ arbitraria.

No lineales

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}$$

En estas, cuando aparecen p^2 y q^2 hay que hacer lo siguiente:

$$\boxed{pdx + qdy = dz}$$

calculo los valores de p y q.

- Suelen ser constantes (C_1 y C_2).
- Hay que derivar para calcularlo.

obtenemos $z(x,y)$ en función de C_1, C_2, x, y.

si aparece C_3 tenemos que igualar en la función original, sustituyendo.

si obtengo C en función de x ó y tenemos que calcular ∇U y αF para calcular la C' y C.

EC. DERIVADAS PARCIALES DE 2º ORDEN

TEMA 5.

Ecuación del calor

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad K>0 \quad 0<x<L \quad t>0$$

K = difusividad térmica

$$u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 \qquad t>0$$

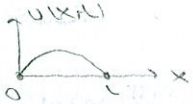
$$u(x,0)=f(x) \qquad 0<x<L$$

solución:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

Ecuación de onda



$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0<x<L \qquad t>0$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(L,0)=0 \qquad t\geq 0$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \qquad 0<x<L$$

solución:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

! NOTA:

$$\boxed{\begin{aligned}\sum A_n \operatorname{sen}(nx) &= f(x)\\ \sum B_n\, an \operatorname{sen}(nx) &= g(x)\end{aligned}}$$

Por Fourier sale eso

→ cuando nos dan $f(x)$ y $g(x)$ en función de senos.

! Problema 5 del Exámen: Obtener la solución de la ecuación de onda.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Teniendo en cuenta las condiciones $u(x,0) = f(x)$ y $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$, se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L} 0\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} 0\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x)$$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ es el desarrollo de Fourier de senos y cosenos en medio intervalo. Por la unicidad de los coeficientes de dicha serie de Fourier se tiene que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{an\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{an\pi}{L} t\right) + B_n \frac{an\pi}{L} \cos\left(\frac{an\pi}{L} t\right) \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = g(x)$$

obteniéndose de nuevo un desarrollo en serie de Fourier de senos en medio intervalo. Por la unicidad de los coeficientes de dicha serie de Fourier, se tiene que:

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$