Escuela Politécnica Superior de Málaga. CÁLCULO

4. Funciones de varias variables.

1. Describe y dibuja en el plano el dominio de las siguientes funciones en el espacio:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{5\sqrt{x-y^2}}$

   (e) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)$

   (f) $f(x,y) = e^{x/y}$

   (g) $f(x,y) = \ln(4-xy)$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   (i) $f(x,y) = \arccos\dfrac{y}{x}$

   (j) $\arccos(x^2-y)$

   (k) $f(x,y) = \dfrac{x+1}{(x-1)y}$

   (l) $f(x,y) = \log xy$

   (m) $f(x,y) = \sqrt{1-x} - e^{\frac{x}{y}}$

2. Describe las curvas de nivel y haz un esbozo de la gráfica para las siguientes funciones en el espacio:

   (a) $f(x,y) = 25-x^2-y^2$

   (b) $f(x,y) = 2x-y+5$

   (c) $f(x,y) = xy$

   (d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

   (e) $f(x,y) = 4x^2+y^2$

   (f) $f(x,y) = x^2-y+5$

   (g) $f(x,y) = 2^{(x-1)^2+y^2}$

   (h) $f(x,y) = 2^{4x^2+9y^2}$

   (i) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

   (j) $f(x,y) = |xy|$

   (k) $f(x,y) = y - \sin x$

3. Simplifica y calcula el valor de los límites que siguen:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x+y+1}-1}{x^2-y^2}$

4. Calcula los límites según distintas direcciones para determinar la no existencia de los límites que siguen.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x^2-y-1}{y^2-x+1}$

5. Prueba que los siguientes límites existen:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2(y+1)+y^2}{x^2+y^2}$

6. Calcula, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|xy|}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x+y^2}$

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$

7. calcula dos vectores directores del plano tangente a la superficie que define la función $f(x,y) = x^2y - y + 1$ en el punto $(1,2)$. Calcula su plano tangente.

8. Halla las funciones derivadas parciales $\partial f/\partial x(x,y)$, $\partial z/\partial y(x,y)$ de las siguientes:

   (a) $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x$

   (b) $f(x,y) = e^{xy}\cos y^x$

(c) $f(x,y) = \dfrac{y}{\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}}$

(d) $f(x,y) = e^{x \ln y}$

9. Halla las derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-xy}$en $(0,1)$

   (b) $f(x,y) = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$ en $(1,0)$

   (c) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-\pi z} \cos 4x \operatorname{sen} 6y$ en $(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, 0)$

   (d) $f(x,y) = 2^{(x-1)^2+y^2}$ en $(2-1)$.

   (e) $f(r,s) = \sqrt{ar^2 + \dfrac{b^2}{s}}$ en (b,a).

   (f) $f(u,w) = ue^w + w\cos u$ en $(-\pi,\pi)$.

10. Estudia la diferenciabilidad de las funciones:

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (b) $f(x,y) = \dfrac{x^n}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ según los valores de n.

11. En las siguientes funciones, halla las derivadas parciales segundas y comprueba si se cumple el teorema de Schwartz:

    (a) $f(x,y) = e^x \ln(3+y^2)$ para cualquier (x,y)

    (b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{xy}$ en $(0,0)$

    (c) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + \cos(2x-3y)$ para cualquier (x,y)

12. Halla la derivada direccional de la función $f(x,y) = 2x^2 + xy$ en el punto $P_0 = (1,0)$, en la dirección del vector $(3,4)$, utilizando la definición de derivada direccional.

13. Halla el vector gradiente de la función $f(x,y) = x^2y + xy^3$ en el punto (-1,2).

14. Se describe la superficie de una montaña mediante la ecuación $f(x,y) = 4000 - 0.0001x^2 - 0.004y^2$. En qué dirección debe moverse el alpinista que está en el punto $(500,300,3390)$ para ascender lo más rápidamente posible? ¿Cuánto vale en esa dirección la pendiente de la montaña? ¿En qué dirección debe moverse para esquiar horizontalmente?

15. La temperatura, en grados celsius, sobre la superficie de una placa metálica viene dada por $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$ midiéndose x, y en pulgadas. Desde el punto (2,-3), ¿En qué dirección crece la temperatura más rápidamente? ¿A qué razón se produce ese crecimiento?

16. Calcula la recta normal a la elipse $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $y=1$

17. Calcula la recta normal y el plano tangente a la superficie definida por $xyz - 4xz^3 + y^3 - 10 = 0$ en el punto $(-1,2,1)$

18. Busca los puntos del hiperboloide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 0$

19. Busca los puntos del paraboloide $z = 4x^2 + 9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 4, 3)$ y $(5, -1, 2)$.

20. Dada la función $f(x, y) = x^2y - y^2$ donde $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \mathrm{e}^t$, halla dz/dt cuando $t = 0$ aplicando la regla de la cadena.

21. Dada la función $f(x, y) = 2xy$ donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$, halla $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial t$ aplicando la regla de la cadena

22. Halla $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para las funciones siguientes:
a) $w = xy + yz + xz$ donde $x = s\cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$ y $z = t$.
b) $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$ donde $x = t + s$, $y = t - s$ y $z = 2ts$.

23. Calcula dy/dx siendo $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.

24. Calcula $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ siendo $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.

25. Prueba que $(0, 0)$ es mínimo de la función $f(x, y) = 1+x^2+y^2$. Prueba que $(0, 0)$ no es extremo de $f(x, y) = y^2 - x^2$

26. Determina los extremos relativos de las siguientes funciones con ayuda del Hessiano:

    (a) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$
    (b) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$
    (c) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
    (d) $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$
    (e) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$
    (f) $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2+1}$
    (g) $f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
    (h) $f(x, y) = x^2y^2$

27. Una lámina metálica rectangular mide 5 m. de ancho y 8 m. de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. ¿Como debe hacerse para obtener una caja del máximo volumen posible?

28. Determina el valor de tres números reales cuya suma sea 1000 y cuyo producto sea máximo.

29. Se pretende construir una caja rectangular sin tapa de volumen 12 litros. El material para el fondo cuesta 4 euros el decímetro cuadrado, el de dos de los laterales a 3 euros y el de los otros dos a 2 euros. Qué dimensiones de la caja tiene un coste de fabricación mínimo?

30. Halla las dimensiones de una caja rectangular abierta con superficie A y volumen máximo.

31. Halla la distancia más corta entre el punto $(2, 1, -1)$ y el plano $4x - 3y + z = 5$.

32. Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Halla el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$.

33. Expresa el lagrangiano y determina los extremos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican en cada caso:

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$
    (b) $f(x,y) = 3x^2 + y^3$ sujeto a $x^2 + y^2 - 9 = 0$
    (c) $f(x,y) = 4xy$ sujeto a $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
    (d) $f(x,y) = xy$ sujeto a $x + y = 10$
    (e) $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x + y - 4 = 0$
    (f) $f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeto a $y - x^2 = 0$
    (g) $f(x,y) = xy$ sujeto a $x^2 + y^2 + xy = 4$

34. Halla el punto de la recta, intersección de los planos $x - y = 2$, $x - 2z = 4$ que es más próximo al origen de coordenadas.

35. Calcula el volumen máximo posible de una caja rectangular con sus caras paralelas a los planos coordenados y que está inscrita en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

36. Sea C el arco contenido en el primer octante de la curva en que se intersecan el paraboloide $2z = 16 - x^2 - y^2$ y el plano $x + y = 4$. Encuentra los puntos de C más cercano y más alejado del origen.

37. Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 4$ en el semicírculo delimitado por $y > 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$

38. Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ en el recinto limitado por $y = x^2$, $y = 4$

39. Halla los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el círculo $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.

40. Calcula los extremos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$ en el interior del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$

41. Halla el valor máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el recinto limitado por las rectas $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$ e $y = -1 + x$.