TEMA 2: DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS
(Aplicación lineal de V en V)

Sirve para resolver $A^{10} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots \cdot A \cdot A}_{10 \text{ veces}}$

$f: V \to V$

$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ se dice que λ es un valor propio y que v es un vector asociado a λ.

Ejplo: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

son iguales

$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \to A\vec{v} = \lambda I \vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} = 0$

Esta Matriz tiene que dar 0, y solo da 0 si sólo si.

$\boxed{|A - \lambda I| = 0}$ Polinomio característico.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

Resumen:

El Polinomio característico de A es $|A - \lambda I| = 0$, hay que resolver los valores propios de λ.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 3 \\ \searrow \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

→ Resolvemos el vector propio asociado a los λ.

$\lambda_1 = 3$ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0$ solución: $\langle(1,1)\rangle$

$\lambda_2 = 1$ $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0$ solución: $\langle(1,-1)\rangle$

Matriz de paso.

De la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ sus autovalores son $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$

¿cómo calculamos el vector propio? $|A-\lambda I|=0$

$(A-4I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\bar{v}_1\begin{pmatrix}2/3\\1\end{pmatrix} \quad \lambda_1=4}$

$(A+I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\bar{v}_2(-1,1) \quad \lambda_2=-1}$

vectores propios

→ colocando los vectores propios en posición vertical obtenemos la matriz de paso.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^2$$

$$\underbrace{\underset{P}{\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}}}_{D}$$

$$\boxed{D=P^{-1}AP}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&0\\3&1&0&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1\\-3&2\end{pmatrix}\frac{1}{5}=P^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&3&1\end{array}\right)$$

↑ Esta es P

pero aquí ya está la inversa.

TEOREMA:

$AP=PD \rightarrow AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}v_{11}&v_{21}\\v_{21}&v_{22}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}v_{11}&v_{21}\\v_{12}&v_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

• Dada A (cuadrada $n \times n$), si $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ son sus valores propios y $v_1, v_2 \dots v_n$ son vectores propios, entonces:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{(v_1 v_2 \dots v_n)^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{A}_{A} \underbrace{(v_1, v_2, \dots v_n)}_{P}$$

quiere decir q todo es 0.

• Ahora si queremos calcular A^{50}

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \longrightarrow A^{50} = P D^{50} P^{-1}$$

entonces A^{50} es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{50} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{50} & 0 \\ 0 & (-1)^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Málaga 8-11-10

Fibonacci

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

si $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¿cuánto será F_{500}?

$$\begin{pmatrix} F_{500} \\ F_{499} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{499} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vectores propios asociados a:

$\rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t \qquad \boxed{V_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$x_2 = t$$

$\rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$(A - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t \qquad \boxed{V_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$x_2 = t$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^{499} = PD^{499}P^{-1}$$

$$D^{499} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{499} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{499} \end{pmatrix}$$

Fibonachi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F_{n-1} = F_{n-1} - F_{n-2}$$

¿F_{500}? ¿F_n fórmula?

↳ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

$F_{10} = F_9 + F_8$

$F_{500} = F_{499} + F_{498}$

$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{500} \\ F_{499} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{499} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

autovalores:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = -\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-(4)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{5} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-(\frac{1}{2}+\sqrt{5}) & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1/2 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \left\langle \left(\frac{-1}{1/2 - \sqrt{5}}, 1 \right) \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}+\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{5} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \left\langle \left(\frac{-1}{1/2 + \sqrt{5}}, 1 \right) \right\rangle$$

$x_2 = t$

$1/2 + \sqrt{5}\, x_1 + t = 0$

$x_1 = \frac{-t}{1/2 + \sqrt{5}}$

Vectores propios:

$$\vec{V_1} = \left(\frac{-1}{1/2 - \sqrt{5}}, 1 \right) \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{5}$$

$$\vec{V_2} = \left(\frac{-1}{1/2 + \sqrt{5}}, 1 \right) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{5}$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \frac{-1}{1/2-\sqrt{5}} & \frac{-1}{1/2+\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \frac{-1}{1/2-\sqrt{5}} & \frac{-1}{1/2+\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}} \mathbb{R}^2}_{D}$$

$$D = P^{-1} A P$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1/2-\sqrt{5}} & \frac{-1}{1/2+\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{1/2-\sqrt{5}} & \frac{-1}{1/2+\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/2 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{499} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1/2-\sqrt{5}} & \frac{-1}{1/2+\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2+\sqrt{5})^{499} & 0 \\ 0 & (1/2-\sqrt{5})^{499} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{1/2-\sqrt{5}} & \frac{-1}{1/2+\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición Dada A de orden $n \times n$, se dice que A es diagonalizable si $\exists P \,/\, P^{-1}AP = D$ con D diagonal, para cierta P.

TMA: Si A $n \times n$ es tal que:

① Si los n valores propios son distintos entonces sus vectores propios $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_n}$ son independientes por tanto A es diagonalizable.

Si los n valores propios no son iguales (son repetidos, es decir, de multiplicidad distinta de 1), entonces es diagonalizable sólo si es posible obtener una base $v_1, v_2, \dots v_n$ de vectores propios.

Eplo: Será diagonalizable si por ejemplo:

$\lambda_1 = 1$ (dos veces) $\rightarrow$ multiplicidad 2.

$\lambda_2 = 5$

$\lambda_3 = 7$

Es diagonalizable si λ_1 tiene dos vectores propios $\neq$.

Problema: ¿a?

$f(x,y,z) = (x, ax+y, x+y+2z)$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ a & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2

$\lambda_2 = 2$

→ Vectores propios cuando $\lambda_1 = 1$

$(A - \lambda_1 I) = 0$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 0$. El sistema depende de un parámetro, obtengo <u>UN</u> solo vector propio, NO DIAGONALIZABLE.
- Si $a = 0$:

$x_1 = -\lambda - t$

$x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$

$V_{\lambda_1}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ y $V_{\lambda_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

Problema 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & a-\lambda & 0 \\ 2 & b & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = a$
$\lambda_3 = 2$

- cuando $a \neq 1$ y $\neq 2$. Diagonalizable $\forall b$.
- cuando $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & b & +1 \end{pmatrix}$$

→ Depende de un parámetro.

NO DIAGONALIZABLE.

- cuando $a = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}$$

si $\underline{b \neq 0}$. El sistema dependerá de un parámetro. NO DIAGONALIZABLE.

si $\underline{b = 0}$, dependerá de 2 parámetros

$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$2x_1 = -x_2 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 = -1/2\,\lambda - 1/2\,t \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} V_{\lambda,2}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} V_{\lambda,2}$

Definición: Subespacio Propio.

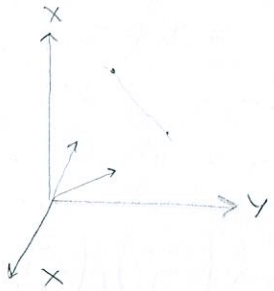
si λ es un valor propio y $\vec{V_{1\lambda}}, \vec{V_{2\lambda}} \dots$ son sus vectores propios: $E_\lambda = \langle \vec{V_{1\lambda}}, \vec{V_{2\lambda}} \dots \vec{V_{n\lambda}} \rangle$

Málaga 10-11-10

Vectores: Espacio Vectorial.

Puntos: Espacio Afín

Definición: Espacio Afín.



$\mathbb{R}^n$ conjunto de puntos

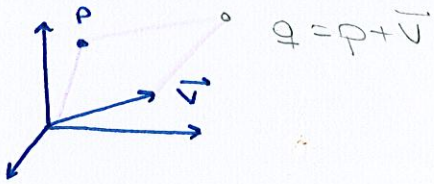
V_n espacio de vectores de dim n.

SUMA AFIN +

$$+ : (\mathbb{R}^n, V_n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(p, \vec{v}) \longrightarrow p + \vec{v} = q \;/\; \overrightarrow{pq} = \vec{v}$$

¿Quién será la suma de $p + \vec{v}$?



Definición: Subespacio Afín.

Dado S subespacio vectorial

Dado p punto.

$$p + S = \{ p + \vec{v} \;/\; \vec{v} \in S \}$$

si dim S = 1 p+S recta (Afín)

si dim S = 2 p+S plano.

① Eplo: En $\mathbb{R}^3$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = S$; $P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ¿$P+S$?

$$P+S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \text{ Recta}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

O en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2+t \\ x_2 = 1+2t \\ x_3 = -3+7t \end{array}\right\}$$

② $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$; $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ¿$P+S$?

$$P+S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 + t_1 + 5t_2 \\ x_2 = 1 + 2t_1 + (-1)t_2 \\ x_3 = 4 + 7t_2 + 2t_2 \end{array}\right\}$$

Calcular las Ec. Cartesianas para ①.

$x_1 - 2 = t$

$x_2 - 1 = 2t \longrightarrow t = \dfrac{x_2 - 1}{2}$

$x_3 + 3 = 7t \longrightarrow \dfrac{x_3+3}{7} = t$

$$\frac{x_2-1}{2} = \frac{x_3+3}{7} = x_1 - 2$$

$$x_1 - 2 = \frac{x_3+3}{7} = \frac{x_2-1}{2}$$

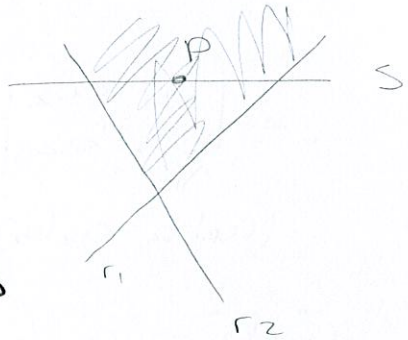
$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 4 = x_2 - 1 \\ 7x_2 - 7 = 2x_3 + 3 \end{array}\right. \longrightarrow \text{Ec. Cartesianas}$$

3inc − 1 par = 2 ec.

Definición: **Haz de planos que pasa por r.**

Dados $\begin{cases} AX_1 + BX_2 + CX_3 + D = 0 \\ A'X_1 + B'X_2 + C'X_3 = 0 \end{cases}$ entonces

$(AX_1 + BX_2 + CX_3) + \lambda(A'X_1 + B'X_2 + C'X_3) = 0$ es un plano que pasa por r.



... seguimos el problema:

Haz de planos r_1 y r_2.

$$X_1 - X_2 - 2X_3 - 2 + \lambda(3X_1 - X_2 - 1) = 0$$

pto(1,0,1):

$$1 - 0 - 2 - 2 + \lambda(3\cdot 1 - 0 - 1) = 0 \rightarrow \lambda = 3/2$$

Pasamos a cartesianas:

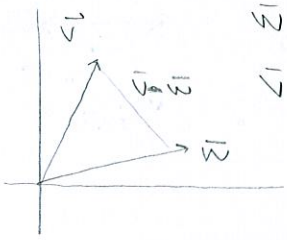
$$\begin{cases} 2X_1 = X_2 - 1 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

Donde $\lambda = -1$

Sustituimos los λ's en sus haces, nos da:

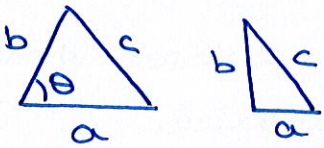
$$\begin{cases} 11X_1 - 5X_2 - 7X_3 = 3 \\ X_1 - X_2 - X_3 = -1 \end{cases}$$

Tma. del COSENO:



$\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



$c^2 = a^2 + b^2$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$\|\bar{w}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 = \|\bar{v} - \bar{w}\| - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\theta$$

$$w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = (v_1 - w_1)^2 - (v_2 - w_2)^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\theta$$

$$= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2v_1w_1 - 2v_2w_2 - 2\|v\|\|w\|\cos\theta$$

$$v_1w_1 + v_2w_2 = -\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}$$

$$\boxed{\cos(\widehat{v,w}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}}$$

angulo que va de $\vec{w}$ a $\vec{v}$

Definición: Producto vectorial.

Dado $\vec{a} = (a, a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b, b_2, b_3)$

$(V_3, V_3) \longrightarrow V_3$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{i} + (-) \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\bar{i} + (a b_2 - a_2 b)\bar{j} + (a b_1 - a_1 b)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1), (-a b_2 + a_2 b), (a b_1 - a_1 b)}$$

Definición: Producto escalar en $\mathbb{R}^n$ ("operación $\bullet$").

$\bullet : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} \bullet \vec{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \ldots v_n w_n$

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 \ldots + v_n w_n}$$

Ejlos:

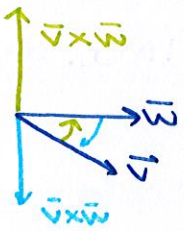
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 + 6 + 0 = 6$

Tma:

① Si $\vec{v}, \vec{w}$ son perpendiculares $\Longleftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

② $\vec{v}, \vec{w}$ son perpendiculares a $\vec{v} \times \vec{w}$



Problema.

$r_1 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ $\qquad r_2 \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Hallar la recta que pasa por $P(1,0,1)$ y pas r_1 y r_2

$(t, t, 2t+2)$

$(\lambda, -\lambda, 1-\lambda)$

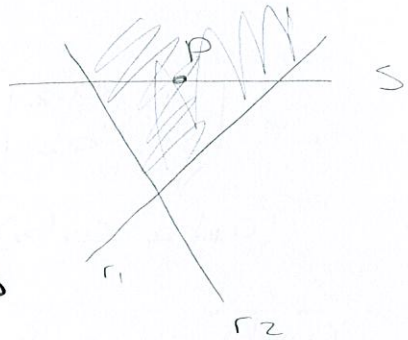
ASÍ NO

$$\overrightarrow{(t-\lambda, t+\lambda, 2t+\lambda+1)} = \overrightarrow{\mu(\lambda-1, -\lambda, -\lambda)} = \overrightarrow{\gamma(t-1, t, 2t+1)}$$

Definición: Haz de planos que pasa por r.

Dados $\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \\ A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 = 0 \end{cases}$ entonces

$(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3) + \lambda(A'x_1 + B'x_2 + C'x_3) = 0$ es un plano que pasa por r.



... seguimos el problema:

Haz de planos r_1 y r_2.

$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 2 + \lambda(3x_1 - x_2 - 1) = 0$$

pto $(1,0,1)$:

$$1 - 0 - 2 - 2 + \lambda(3\cdot 1 - 0 - 1) = 0 \rightarrow \lambda = 3/2$$

Pasamos a cartesianas:

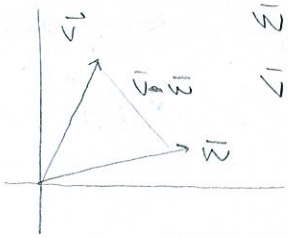
$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 - 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Donde $\lambda = -1$

Sustituimos los λ's en sus haces, nos da:

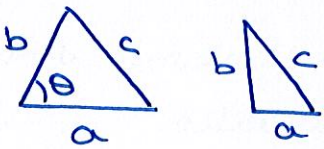
$$\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Tma. del COSENO:



$\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



$c^2 = a^2 + b^2$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$\|\bar{w}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 = \|\bar{v} - \bar{w}\| - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\theta$$

$$w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = (v_1 - w_1)^2 - (v_2 - w_2)^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\theta$$

$$= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2v_1w_1 - 2v_2w_2 - 2\|v\|\|w\|\cos\theta$$

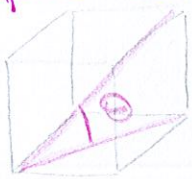
$$v_1w_1 + v_2w_2 = -\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}$$

$$\boxed{\cos(\widehat{v,w}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}}$$

angulo que va de $\vec{w}$ a $\vec{v}$

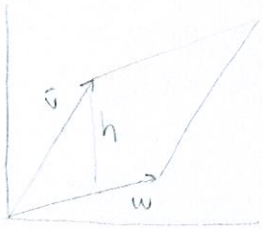
Eplo: En $\mathbb{R}^3$. ¿cuánto es θ? $v(1,1,1)$ $w(1,1,0)$.



$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}\ ;\ \theta = 35^\circ,36}$$

Área del paralelogramo:



$$S = \|w\|\cdot h = \|w\|\,\|v\|\,\text{sen}\,\theta$$

$$S^2 = \|w\|^2\,\|v\|^2\,\text{sen}^2\theta$$

$$= \|\bar{w}\|^2\,\|\bar{v}\|^2\,(1-\cos^2\theta)$$

$$S^2 = \|w\|^2\|v\|^2 - \|v\|^2\|w\|^2\cos^2\theta$$

$$= \|w\|^2\,\|v\|^2 - (v\cdot w)^2$$

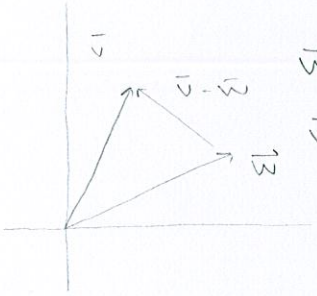
$$= (w_1^2+w_2^2)(v_1^2+v_2^2) - (v_1w_1+v_2w_2)^2$$

$$= (w_1^2v_1^2 + w_1^2v_2^2 + w_2^2v_1^2 + w_2^2v_2^2 - v_1^2w_1^2 - v_2^2w_2^2 - 2v_1w_1v_2w_2$$

$$S^2 = (w_1v_2 = w_2v_1)^2$$

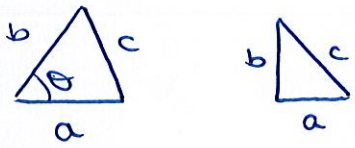
$$S = (w_1v_2 - w_2v_1) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Teorema del coseno:



$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



$c^2 = a^2 + b^2$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$\|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}-\vec{w}\| - 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos\theta$$

$$w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = (v_1 - w_1)^2 - (v_2 - w_2)^2 - 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta$$

$$= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2v_1w_1 - 2v_2w_2 - 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta$$

$$v_1w_1 + v_2w_2 = -\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta$$

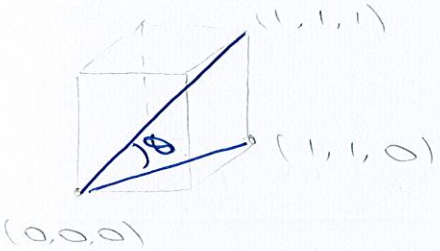
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = -\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}$$

θ ángulo que va de $\vec{w}$ a $\vec{v}$

$$\boxed{\cos(\widehat{v,w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}}$$

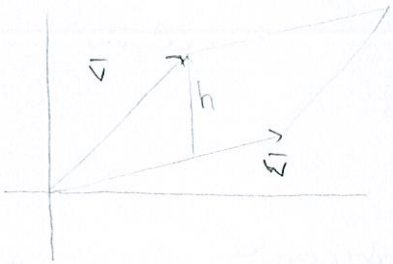
Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ ¿cuanto es θ?



$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\,\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3} \;;\; \theta = 35^\circ{,}36}$$

Eplo Área del paralelogramo.



$$S = \|w\| \cdot h = \|\bar{w}\| \cdot \|\bar{v}\| \operatorname{sen}\theta$$

$$S^2 = \|\bar{w}\|^2 \|v^2\| \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= \|\bar{w}\|^2 \|\bar{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2 = 1$

$$S^2 = \|w\|^2 \|v\|^2 - \|v^2\| \|w\|^2 \cos^2\theta$$

$$= \|w\|^2 \|v\|^2 - (v \circ w)^2$$

$$= (w_1^2 + w_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2$$

$$= \cancel{w_1^2 v_1^2} + w_1^2 v_2^2 + w_2^2 v_1^2 + \cancel{w_2^2 v_2^2} - \cancel{v_1^2 w_1^2} - \cancel{v_2^2 w_2^2} - 2 v_1 w_1 v_2 w_2$$

$$S^2 = (w_1 v_2 - w_2 v_1)^2$$

$$S = (w_1 v_2 - w_2 v_1) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

→ Para calcular el Área solo hay que hacer el determinante.

Eplo Área de un triángulo.

A(1,5)
B(−1,2)
C(3,3)

$\overline{AB} = (-1,2) - (1,5) = (-2,-3)$

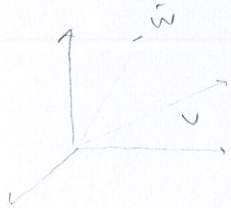
$\overline{AC} = (3,3) - (1,5) = (2,-2)$

$$S = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} = (-2 \cdot 2) - (-3 \cdot 2) \frac{1}{2}$$

$$= (-4 + 6) \frac{1}{2} = 1$$

→ Siempre tenemos que poner el Área en valor absoluto.

Area paralelogramo formado por $\bar{v}, \bar{w}$ en $\mathbb{R}^3$

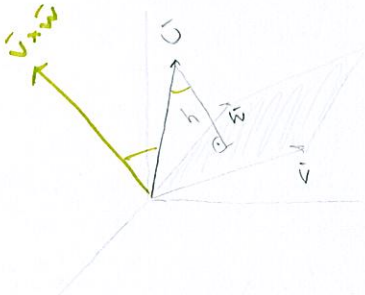


$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ altura $= 2$

$$S = \|\bar{v} \times \bar{w}\|$$

<u>solución</u>: $V_{prisma} = \frac{1}{2} \|\bar{AB} \times \bar{AC}\| \cdot 2$

Volumen del Paralelepípedo. $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}$



$$h = \|\bar{u}\| \cos\theta$$

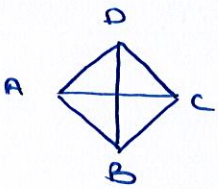
$$V = \|\bar{v} \times \bar{w}\| \cdot h = \|\bar{v} \times \bar{w}\| \cdot \|\bar{u}\| \cos\theta =$$

$$= \underline{(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{u}}$$

:= producto mixto $[\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}] =$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

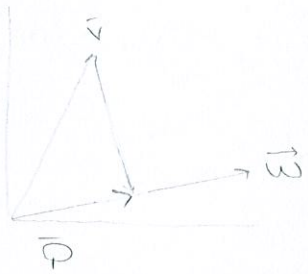
Volumen de la pirámide:



$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \bar{AB} \\ \bar{AC} \\ \bar{AD} \end{vmatrix}$$

T2.8

Proyección en $\mathbb{R}^2$.



$$\|\bar{p}\| = \|\bar{v}\| \cos\theta$$

$$\bar{v}\cdot\bar{w} = \|\bar{v}\|\cdot\|\bar{w}\|\cos\theta = \|\bar{w}\|\cdot\|\bar{p}\|$$

p mide: $\|\bar{p}\| = \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{w}\|}$

unitario de $\bar{w}$ es $\dfrac{1}{\|\bar{w}\|}\bar{w}$

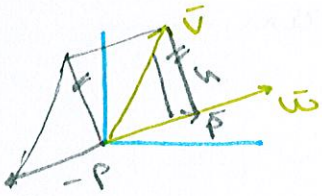
$\bar{p}$ es: $\dfrac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{w}\|}\ \dfrac{1}{\|\bar{w}\|}\bar{w} = \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}\cdot\bar{w}$

$\|\bar{w}\|^2 = \bar{w}\cdot\bar{w}$

Eplo: Proyección de $\bar{v}$ sobre $\bar{w}$; $\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$; $\bar{w} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\bar{P_v} = \frac{(1,5,-2)\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}}{(3,0,1)\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{-5}{10}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$$

observación:



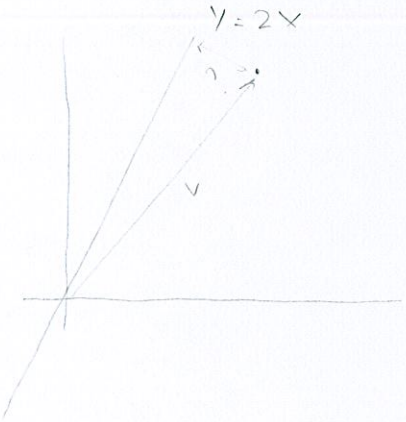
$v - p = h$

Demostrar que $\bar{p}$ es la proy. de v sobre w entonces $\bar{v}-\bar{p}$ es $\perp$ a $\bar{w}$

$$w\cdot(P_v - \bar{w}) = 0$$

$$w\cdot\left(\frac{v\cdot w}{w\cdot w}\bar{w} - \bar{v}\right) = \left(\frac{v\cdot w}{\cancel{w\cdot w}}\right)(\cancel{w\cdot w}) - (w\cdot v) = 0$$

calcular la proy. de $(5,7)$ sobre $y=2x$.



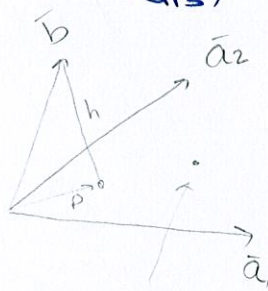
$v=(5,7)$

$w=(1,2)$

$$\frac{(1,2)\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}}{(1,2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{p}$$

proyección sobre un plano (que pasa por el origen), es decir, subespacio vectorial S.

$$S=\left\langle \bar{a}_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{pmatrix},\ \bar{a}_2\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\end{pmatrix}\right\rangle$$



$x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2=Ax$

$$\bar{p}=r_1\bar{a}_1+r_2\bar{a}_2=$$

$$=r_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}a\\a_{22}\\a_{23}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\\a_{13}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}=Ar$$

¿Quién es r?

Como $\bar{b}-\bar{p}$ es $\perp$ al plano, entonces:

$$(\bar{b}-\bar{p})\cdot Ax=0=Ax\cdot(\bar{b}-\bar{p})=$$

$$=Ax\cdot(\bar{b}-Ar)=(Ax)^t(\bar{b}-Ar)=$$

hemos pasado un vector fila a columna.

$$(AB)^t=B^tA^t$$

T2-9

$= x^t A^t (\bar{b} - Ar) = x^t (A^t \bar{b} - A^t Ar) = 0$

como x no es necesariamente 0 entonces:

$$A^t \bar{b} - A^t Ar = 0$$

$$A^t \bar{b} = A^t Ar$$

$$\boxed{r = (A^t A)^{-1} \cdot A^t \bar{b}}$$

solución: $\vec{p}$ es

$$\boxed{\bar{p} = \underset{3\times2}{A} \underset{2\times2}{(A^t A)^{-1}} \underset{2\times3}{A^t} \bar{b}}$$

3x3

$A(A^t A^{-1}) A^t$ → Es la matriz de proyección asociada al plano.

Eplo: Matriz proyección.

$S = \langle \overset{\equiv \pi}{(x+y+z=2)} \rangle$ → Este es un plano cualquiera

El <u>subespacio asociado</u> es: $x+y+z=0 \equiv S$

se busca una base: se toman dos ptos más sencillos:

$\vec{a_1}\ (1,0,-1)$

$\vec{a_2}\ (0,1,-1)$

$$\boxed{\underset{3\times3}{P_S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Tenemos P_S → multiplicamos por lo que nos piden y tenemos la proyección, $\bar{p}$.

ÁLGEBRA. Escuela Politécnica Superior de Málaga

Tema 2. Diagonalización de endomorfismos.

1. Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, dando la matriz de paso, la base de vectores propios y la relación entre la matriz dada y la diagonal. Calcular A^3.

2. Estudiar para qué valores del parámetro a es diagonalizable el siguiente endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde $f(x, y, z) = (x, ax + y, x + y + 2z)$

3. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales.

   (a) Calcula el polinomio característico de A, así como sus autovalores.

   (b) ¿Para qué valores de a y b la matriz A es diagonalizable?

4. Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Determina los valores y vectores propios de f

   (b) Calcula las dimensiones y determinar una base de los subespacios propios asociados a los valores propios.

   (c) ¿Es posible caracterizar el endomorfismo f mediante una matriz diagonal?

5. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Determina para que valor de a es A diagonalizable.

   (b) En el caso en que sea posible, halla una base de autovectores B.

(c) Da una matriz diagonal D que represente a f respecto de la base B.

(d) ¿Qué relación existe entre las matrices A y D?

(e) Usa la relación anterior para calcular A^6.

6. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y A la matriz del endomorfismo referida a dicha base. En dicho endomorfismo, los subespacios

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, \quad x - z = 0\}$$

están asociados respectivamentes a los autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

(a) Diagonaliza el endomorfismo.

(b) Determina una base de vectores propios.

(c) Calcula la matriz A.

7. Sabemos que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios $(1, 1, 0), (-1, 0, 2), (0, 1, -1)$. Halla los elementos de dicha matriz y calcula sus autovalores.