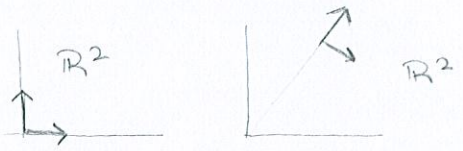
Málaga 17-11-10

# TEMA 3. TRANSFORMACIONES AFINES.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$




En $\mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} ?$$

En $\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ec. de una transformación afín $\rightarrow$ $\boxed{Y = A\vec{X} + \vec{b}}$

A es la matriz de la transformación lineal asociada a $\vec{b}$ vector.

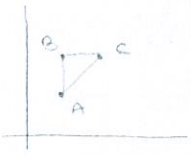
Si en particular $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ Afinidad ó semejanza.

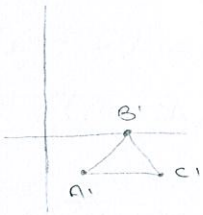
## Problema 12.

$A(1,1)$ $\quad A'(1,-1)$

$B(1,2)$ $\quad B'(2,0)$

$C(2,2)$ $\quad C'(3,-1)$




$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$

$T(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$

~~Base~~ canónica:

$(\leftarrow)$

~~Base~~ canónica:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = T\left(-1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = (-1)T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (1)\,T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= (-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

coja un pto cualquiera para calcular $\vec{b}$.

$$\underset{B'}{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\underset{B}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}$$

- Como calcular puntos fijos:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$$

$$\vec{x} - A\vec{x} = \vec{b}$$

$$I\vec{x} - A\vec{x} = (I - A)\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = (I - A)^{-1}\vec{b}$$

Fórmula puntos fijos: $\boxed{X = (I - A)^{-1} \cdot \vec{b}}$

En el problema:

$$I - A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}$$ Ptos Fijos.

Problema: Hallar las ec. de la afinidad que realiza una reflexión respecto a: $x+y-1=0$

En la canónica:

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

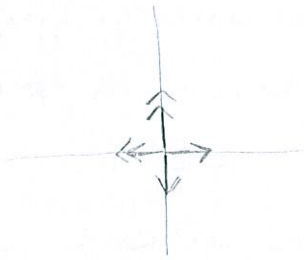
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

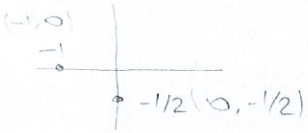
$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Solución:

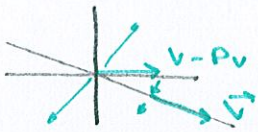
$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



Respecto a: $x+2y+1=0$




TRUCO: lo ponemos como si estuviese sobre el eje (0,0).




$x+2y=0$

entonces: $\vec{v} + (P_v - \vec{v}) + (P_v - \vec{v}) = 2P_v - \vec{v}$

clave para la reflexión: $\boxed{2\vec{P_v} - \vec{v}}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longmapsto 2P(v_0) - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$2\cdot\frac{(1,0)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}{(2,-1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto 2P_{v_0} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$2\cdot\frac{(0,1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}{(2,-1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/5\\-3/5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

Calculamos $\vec{b}$ con el pto (0,-1)

$$\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4/5\\-2/5\end{pmatrix}}$$

Definición: Simetría.

A es simétrica si $A = A^t$

Eplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $\boxed{A^t = A \rightarrow \text{simétricos.}}$

Tma: Dada A una matriz simétrica.

Los valores propios de A son todos reales y distintos.

(Entonces A será diagonalizable siempre).

$D = C^{-1}AC$

Los valores propios son perpendiculares entre sí.

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot v & 0 \\ 0 & w \cdot w \end{pmatrix}$$

$C^t \cdot C =$

es posible obtener C cuyos vectores miden 1.

Que midan 1 significa:

$v \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ tiene $\|v\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

$w \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

si $\|v\| = 1$ entonces $v \cdot v = \|v\|^2 = 1^2 = 1$ y

$C^t = C^{-1}$. A esta C se le llama matriz ortogonal.

$\boxed{D = C^t A C}$ Diagonalización ortogonal.

Definición: Forma cuadrática.

En $\mathbb{R}^2$ $\quad ax^2+bxy+cy^2 = f(x,y)$

En $\mathbb{R}^3$ $\quad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3 = f(x_1x_2x_3)$

En $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} ax+by \\ cy \end{pmatrix} = ax^2+bxy+cy^2$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} ax+b/2\,y \\ \frac{b}{2}x+cy \end{pmatrix} = ax^2+bxy+cy^2$$

matriz simétrica

En $\mathbb{R}^3$:

$$(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Eplo:

$$(x,y)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2-25 \longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 8 \end{matrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = ?$$

+ Vector propio de $\lambda_1$

$$(A+2I \mid 0) = \left(\begin{matrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \qquad (t,-t);\ (1,-1)$$

lo divido por su módulo: $\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$V_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

+ Vector propio de $\lambda_2$.

$$(A-8I \mid 0) = \left(\begin{matrix} -5 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \qquad (t,t)$$

$$V_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

C será:

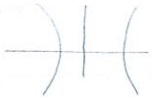
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

→ solución:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Fórmula de la Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Fórmula de la Parábola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Diagonalizar: $3x^2 + 3y^2 + 10xy$

$t = C^{-1}X = C^tX$

Se hace transformación de los ejes $X = Ct$ es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\, t_1 + 1/\sqrt{2}\, t_2 \\ -1/\sqrt{2}\, t_1 + 1/\sqrt{2}\, t_2 \end{pmatrix}$$

$X^t = t^tC^t$

$X^t = t^tC^t$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

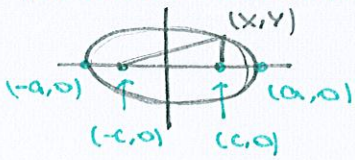
$$(x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^tAX = t^tC^tACt = t^tDt =$$

$$= (t_1, t_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = (-2)t_1^2 + 8t_2^2$$

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + z^2 - xy \quad (\text{sí}) \\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy + xz + x \quad (\text{no}) \end{cases}$$

Problema 15.

Inciso TEORIA:

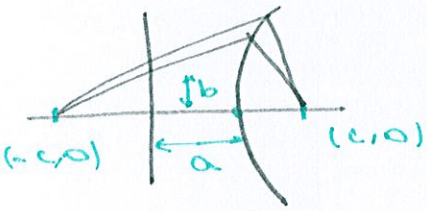



$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

tplo (5,1)

$$\frac{(x-5)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{sería una Elipse.}$$




$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \rightarrow \text{Hipérbola.}$$

En el problema:

$$2xy + 2\sqrt{2}x = 1$$

$$0x^2 + 0y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x = 1$$

Forma cuadrática:

$$(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}x = 1$$

$$|A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Vectores propio de $\lambda_1 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad v_1(t,t)$$

$$v_{\text{normalizado}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Vector propio de $\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad v_2(-t,t)$$

$$v_{n_2} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Transformación de Ejes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}(t_1 - t_2) \\ 1/\sqrt{2}(t_1 + t_2) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1/\sqrt{2}\, t_1 - 1/\sqrt{2}\, t_2 \\ y = 1/\sqrt{2}\, t_1 + 1/\sqrt{2}\, t_2 \end{array}}$$

Por lo que quedaría:

$$t_1^2 + (-1)t_2^2 + 2\sqrt{2}\left(1/\sqrt{2}(t_1 + t_2)\right) = 1$$

$$t_1^2 - t_2^2 + 2t_1 - 2t_2 = 1 \longrightarrow \text{Es una Hipérbola.}$$

completo cuadrados $\left\{ \begin{array}{l} t_1^2 + 2t_1 + 1 - 1 - (t_2^2 + 2t_2 + 1) + 1 = 1 \\ (t_1 + 1)^2 - (t_2 + 1)^2 = 1 \end{array} \right.$

El centro es $(-1,-1)$.

# AFINIDAD.

lo quiero dibujar centrado en (0,0).

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

↑ Esto son los nuevos

↑ Como (−1,−1) se transforma en (0,0)

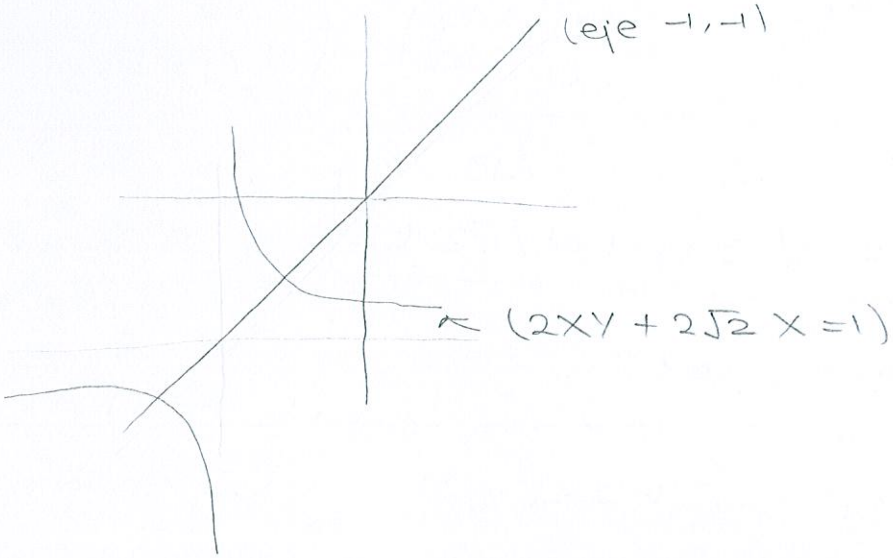
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Despejando sale: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ← Esto es b. Afinidad.

$$\boxed{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$ solución.

Nota curiosa: como $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es igual a $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ cuando $\theta = 45°$, ese es el angulo girado.




$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ Parábola
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ Elipse
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ Hipérbola.

NOTA: cuando el determ. de los vectores normali. es negativo se hace una reflexión y un giro.

Malaga 24-11-10

! Identifica que tipo de cónica o cuadrática es en el caso:

a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$

Forma cuadrática:

$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4\sqrt{2}x = 4$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 - \quad = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Vectores propios:

$\lambda_1 = 0$

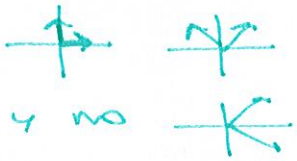
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_1(t,t)$$

$$v_{n_1}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad v_2(-t,t) \longrightarrow$$

Esto se pone así para que ocurre



y no

$$v_{n_2}(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

- transformación de ejes: $X = Ct.$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}(t_1 - t_2) \\ 1/\sqrt{2}(t_1 + t_2) \end{pmatrix}$$

Tb. al cambiar el signo el det es ⊕.

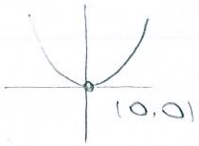
$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1/\sqrt{2}\, t_1 - 1/\sqrt{2}\, t_2 \\ y &= 1/\sqrt{2}\, t_1 + 1/\sqrt{2}\, t_2 \end{aligned}}$$

Por lo que quedaría:

$$0t_1^2 + 2t_2^2 + 4\sqrt{2}\,(1/\sqrt{2}\, t_1 - 1/\sqrt{2}\, t_2) = 4$$

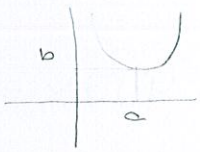
$$0t_1^2 + 2t_2^2 + 4t_1 - 4t_2 = 4$$

Ahora tenemos que calcular el centro de la Parábola.




$x^2 + 0y^2 - y = 0$

$y = x^2$



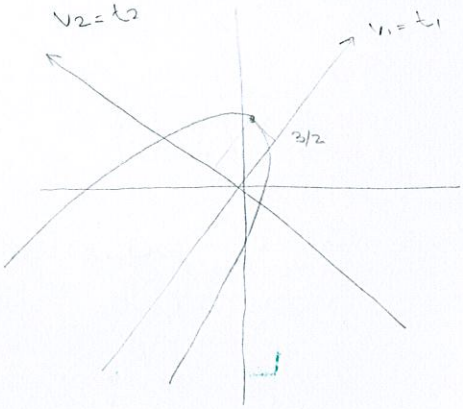

$(y-b) = (x-a)$

$$0t_1^2 + 2(t_2^2 - 2t_2 + 1) - 2 + 4t_1 = 4$$

$$0t_1^2 + 2(t_2 - 1)^2 + 4t_1 = 6$$

$$(t_2 - 1)^2 + 2(t_1 - 3/2) = 0$$

→ Los ejes son los autovalores siempre!!!




El centro será $(3/2, 1)$

cuando sea:

$y = x^2$

$y = -x^2$

$-y^2 = x$ $\quad$ $y^2 = x$

# CUADRÁTICAS

Una cuadrática es cuando una cónica pasa a estar en 3D.

→ Vamos a pasar a tener matrices 3x3.

Problema 16.

b) $x^2 - 8xy + 16x - 3z = 8$

$$\underbrace{1x^2 + 0y^2 + 0z^2 - 8xy + 0xz + 0yz}_{\text{Esto es lo que pertenece a la forma cuadrática}} + 16x - 3z = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que hallar los autovalores:

$\lambda_1 \cong 3'53$

$\lambda_2 \cong -4'53$

$\lambda_3 = 0$

c) $2xy + 2xz = 1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \lambda I = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - (-\lambda - \lambda) = \lambda^3 + 2\lambda = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \sqrt{2}$

$\lambda_3 = -\sqrt{2}$

## * Generalización del producto escalar.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w}) \end{array}}$$

### * Producto interno:

Definición: $\bullet : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$

Propiedades:

1. $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ si $\vec{v} \neq 0$
2. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ conmutativo
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \vec{u} = \vec{v}\vec{u} + \vec{w}\vec{u}$ Distributivo
4. $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w})$

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$.

$$(x_1 x_2)\cdot(y_1 y_2) := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

1) $(x_1 x_2)(x_1 x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ si $(x_1 x_2) \neq (0,0)$

2) Evidente

3) $[(x_1 x_2) + (y_1 y_2)]\cdot(z_1 z_2) = (x_1 + y \;, x_2 + y_2)(z_1 z_2) =$

$= (x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2 =$

$= (x_1 z_1 + y_1 z_1) + (x_2 z_2 + y_2 z_2) =$

$= (x_1 x_2)(z_1 z_2) + (y_1 y_2)(z_1 z_2)$

4) También sale.

Ahora V son polinomios de grado hasta 1, con variable en X.

$$V = \{a_0 + bx \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

- La suma (+): Es la suma de polinomios

$$(a+bx) + (a' + b'x) = (a + a') + (b + b')x$$

- La multiplicación por un n°:

$$k(a+bx) = ka + kbx$$

Definición: Producto escalar.

$$\boxed{\vec{p}\cdot\vec{q} := \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx}$$

Comprobamos que es producto escalar.

1) $\vec{p}\cdot\vec{p} = \int_0^1 (a+bx)(a+bx)\,dx = \int_0^1 (a+bx)^2 > 0$

2) $\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}\,\vec{p}$ Evidente

3) $(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{f} = \int_0^1 \left([\overset{p}{(a+bx)} + \overset{q}{(a'+b'x)}]\,(a'' + \overset{f}{b''x})\right) dx$

$= \int_0^1 (a+bx)(a''+b''x)\,dx + \int_0^1 (a'+b'x)(a''+b''x)\,dx$

$= \vec{p}\cdot\vec{f} + \vec{q}\,\vec{f}$

4) $(\longrightarrow)$

**Teorema:** Si conocemos una base $v_1, v_2 \dots v_n$ de $V$ y sabemos $v_1 \cdot v_1, v_2 \cdot v_2, \dots, v_n \cdot v_n$; $v_2 \cdot v_1, v_2 \cdot v_2 \dots v_2 \cdot v_n; \dots$ hasta $v_n \cdot v_n$:

Entonces se conoce el $V \cdot W$ de cualquiera

**Epla:** En $\mathbb{R}^2$

Tenga la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

coordenadas

$$V \cdot W = (x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2)(y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2) = \dots = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 \\ v_2v_1 & v_2v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

siempre la misma

Llamada matriz del producto escalar respecto a la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

Ejemplo polinomios:

$(5+0x) \qquad (0+1x)$

$$7+4x = \frac{7}{5}(5+0x) + 4(0+1x)$$

**Problema 7.**

a) Matriz respecto a la base $1, x$.

$$1 \cdot \bar{x} = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \equiv \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = 1 \cdot 1 = \int_0^1 1\,dx = x\Big]_0^1 = 1$$

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 = \bar{x} \cdot \bar{x} = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 \equiv 1/2$$

La matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$ → siempre será simétrica

b) coseno del ángulo que forma el polinomio:

$$\cos\widehat{(3+x)(4+2x)} =$$

Recordatorio:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

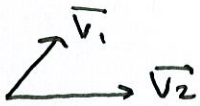
$$= \frac{\int_0^1 (3+x)(4+2x)\,dx}{\sqrt{\int_0^1 (3+x)^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 (4+2x)\,dx}}$$

c) ortonormal.

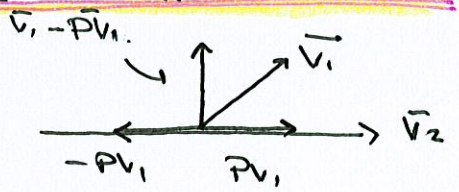
ortonormal: que el ángulo sea 90° y que cada uno valga 1.

{ perpendiculares
mide 1 cada 1.

Esto es el proceso Gram-Schmidt




lo que hacemos es:




si no me mide 1 la divido por sí misma

si $\vec{v}_1 = 1$, $\vec{v}_2 = x$. entonces:

$$P_1 = \frac{1\cdot\bar{x}}{\bar{x}\cdot\bar{x}}\,x = \frac{\int_0^1 1x\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx}\cdot x = \frac{1/2}{1/3}\,x = \frac{3}{2}\,x$$

Esto es $Pv_1$

perpendicular a $x$ es:

$$1 - 3/2\,x = \vec{v}_1 - \vec{Pv}_1$$

la base buscada es:

$$\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 x\cdot x\,dx}}\,x \;,\; \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 (1-3/2x)\,dx}}\,(1-3/2x)$$

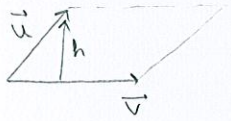
$$\hookrightarrow \left(\sqrt{3}\,x,\ \frac{1}{\sqrt{1/4}}(1-3/2x)\right)$$

son base
son $\perp$
y miden 1.

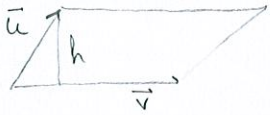
# Problema 10. (Tema 3)

→ Distancia entre dos rectas que se cruzan.

Plano




Espacio



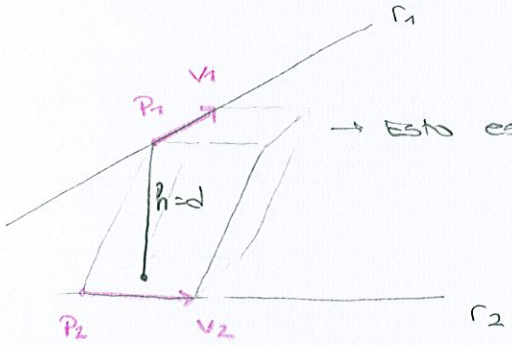

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v}\| \cdot h$

$h = \dfrac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{v}\|}$

área → $\|\vec{v} \times \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \cdot h$

$h = \dfrac{\|\vec{v} \times \vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$

↳ RECORDATORIO →




→ Esto es un paralelepípedo

la distancia más corta es la altura del paralelepípedo.

$V = [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = [\vec{v}_1 \times \vec{v}_2] \cdot h$

Entonces la altura será:

$$\boxed{h = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}}$$

Las rectas que nos dan son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv x_1 = t,\ x_2 = 1 + 2t,\ x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vector}} t + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{pto}}$$

$x_1 = t$

$x_2 = 3t - 1$

$x_3 = -t - 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ +1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1/2 \end{pmatrix}$$

$t - 3t + 1 - 2 = 2x_3$

$-2t - 1 = 2x_3$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_1P_2 = (0, 2, -1/2)$

$\vec{v_1} = (1, 3, 1)$

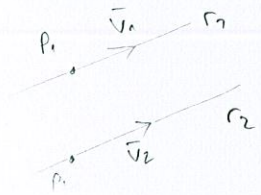
$\vec{v_2} = (1, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} P_1P_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5/2$$

$$\|v_1 \times v_2\| = \|(-2, 1, -1)\| = \sqrt{6}$$

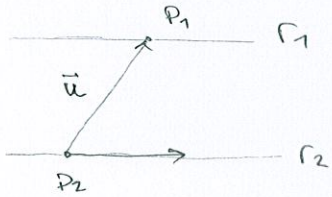
$$h = \frac{5/2}{\sqrt{6}} \longrightarrow \boxed{h = \frac{5\sqrt{6}}{12}}$$

Poner dos rectas que sean paralelas y hallar su distancia.




$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$\bar{u} = \overline{P_1P_2} = (0,-1,1)$$

$$h = \frac{\|\bar{v} \times \bar{u}\|}{\|\bar{v}\|} = \frac{\|(2,-1,-1)\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

$$\|\bar{v} \times \bar{u}\| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - \bar{j} - k$$

RAQUEL SERRANO UEDO

Málaga 24-11-10

Identifica que tipo de cónica o cuadrática es en el caso:

a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$

Forma cuadrática:

$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4\sqrt{2}\,x = 4$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 - 1 \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

→ Vector propio de $\lambda_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Vector propio $(t,t)$

Vector normalizado: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

→ Vector propio de $\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Vector propio $(t,-t)$

Vector normalizado: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

cuma eso y no:

• Transformación de ejes: $X = C \cdot t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 - t_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 + t_2) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}t_2 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_2 \end{aligned}}$$

se le ha cambiado el signo para que el det. sea (+).



T2.16

Esto no hace falta.

Por lo que quedaría:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1+t_2)\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1+t_2)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1-t_2)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1-t_2)\right)^2$$

$$+ 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1+t_2)\right) = 4$$

$$\frac{1}{2}(t_1^2 + \cancel{t_1t_2} + t_2^2) - (t_1^2 - t_2^2) + \frac{1}{2}(t_1^2 - \cancel{t_1t_2} + t_2^2) +$$

$$+ 4t_1 + 4t_2 = 4$$

$$2t_2^2 + 4(t_1+t_2) = 4$$

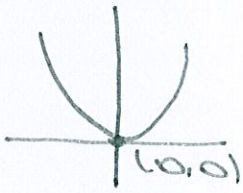
$$t_2^2 + 2(t_1+t_2) = 2$$

Parábola

$$0t_1^2 + 2t_2^2 + 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}t_2\right) = 4$$

$$0t_1^2 + 2t_2^2 + 4t_1 - 4t_2 = 4$$

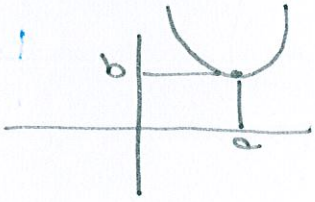
Ahora tenemos que calcular el centro de la parábola.




$$x^2 + 0y^2 - y = 0$$

$$y = x^2$$

si fuese:




$$(y-b) = (x-a)^2$$

$$0t_1^2 + 2(t_2^2 - 2t_2 + 1) - 2 + 4t_1 = 4$$

$$0t_1^2 + 2(t_2-1)^2 + 4t_1 = 6$$

$$(t_2-1)^2 + 2(t_1 - 3/2) = 0$$

## ÁLGEBRA. Escuela Politécnica Superior de Málaga
## Tema 3: Espacio afín y euclídeo. Transformaciones afines.

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son bilineales y si alguna de ellas es un producto escalar:

   *a*) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_2$

   *b*) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como:
   $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 1 - x_2y_1 + 5x_3y_1$

   *c*) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:
   $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 + 2x_2y_2$

2. Diagonalizar las matrices simétricas siguientes, calculando una matriz de paso ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   *a*) Estudiar si existe una matriz diagonal, $D$, que sea semejante a $A$.

   *b*) Encontrar una matriz $P$ tal que $P^{-1}AP = D$.

   *c*) ¿Existe una matriz de paso ortogonal? Si es así, calcularla mediante el método de Gram-Schimdt. Calcular, si es posible, $A^{-1}$ y $A^{2002}$.

4. Diagonalizar y clasificar las formas cuadráticas definidas como:

$$q(x, y) = -6xy + 8y^2$$
$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 - 6xz + z^2 - 4t^2$$

5. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ y con respecto a la base canónica, las formas cuadráticas

$$q_a(x,y,z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz$$

donde $a$ es un parámetro real. Diagonalizar y estudiar el carácter de $q_a$ para los distintos valores de $a$.

6. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ se pide:

   *a*) Determinar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $(1,2,1)$, $(0,-1,1)$ .

   *b*) Obtener mediante el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para el subespacio: $V =< (1,2,1), (0,-1,1) >$

   *c*) Definir en $\mathbb{R}^3$ un producto escalar que no sea el usual y encontrar una base ortonormal respecto de dicho producto escalar.

7. Se define para $f, g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el siguiente producto escalar :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

Calcular:

   *a*) La matriz del producto escalar referida a la base $\{1, t\}$

   *b*) El coseno del ángulo que forman $p(t) = t + 3$; $q(t) = 2t + 4$

   *c*) Una base ortonormal a partir de la base $\{1, t\}$

8. Calcula el ángulo entre una de las diagonales de un cubo, y una de sus caras.

9. Halla el volumen del prisma cuya base es el paralelogramo de vértices $(1,0,1)$, $(3,1,4)$, $(0,2,9)$ y $(-2,1,6)$, y cuya altura es 2.

Posible de examen

10. Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv x_1 = t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = 0$$

*a*) Halla la recta que pasa por $(1,0,1)$ y por $r_1$ y $r_2$.

*b*) Halla la recta que pasa por $(1,0,1)$ y es perpendicular a $r_1$ y $r_2$.

*c*) Halla la distancia entre $r_1$ y $r_2$.

11. (Proyección) Halla la matriz de la transformación lineal que transforma un punto del espacio en su proyección sobre el subespacio (plano) que generan los vectores $(1,0,1),(2,1,0)$. Halla la proyección de la recta $r_2$ sobre ese plano.

12. (Semejanza) Con respecto a la base canńica, halla las ecuaciones de la afinidad que transforma los vértices $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,2)$ de un triángulo en otro triángulo de vértices respectivos $A'(1,-1)$, $B'(2,0)$, $C'(3-1)$. Determina si tiene puntos fijos. Qué relación hay entre las áreas de los triángulos.

13. (Simetría) Con respecto a la base canónica, halla la ecuación de la afinidad que en $\mathbb{R}^3$ transforma un punto en su simétrico (reflexión) respecto al plano $x+y-z=1$. Halla sus puntos fijos si los hubiera.

14. Qué tipo de movimiento es la siguiente afinidad:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

15. Mediante una sustitución ortogonal, identifica qué cónica es $2xy + 2\sqrt{2}x = 1$. Halla después la ecuación de la afinidad que transforma la cónica a su forma estándar centrada en $(0,0)$.

16. Identifica qué tipo de cónica o cuádrica es en cada caso:

*a*) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 4$

*b*) $x^2 - 8xy + 16x - 3z = 8$

*c*) $2xy + 2xz = 1$