Ángela Caravantes García

Análisis vectorial y estadística

(1.)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\,\mathrm{sen}^3 t \end{aligned}\right\}$$

$x'(t) = 3a\cos^2 t\cdot(-\mathrm{sen}\,t)$; $y'(t) = 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cdot\cos t$

$$L = 4\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{(3a\cos^2 t\cdot(-\mathrm{sen}\,t))^2 + (3a\cdot\mathrm{sen}^2 t\cdot\cos t)^2}\,dt$$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\mathrm{sen}^2 t + 9a^2\cdot\mathrm{sen}^4 t\cdot\cos^2 t}\,dt$$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^2 t\cdot\mathrm{sen}^2 t\,(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t)}\,dt \qquad (\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1)$$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi/2} 3a\,\mathrm{sen}\,t\cdot\cos t\,dt = 4\cdot 3a\cdot\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,t\cos t\,dt$$

$$= \int \mathrm{sen}\,t\cos t\,dt \qquad u = \mathrm{sen}\,t;\quad du = \cos t\,dt.$$

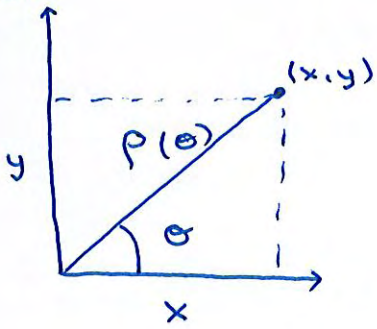
$$\int u\,du = u^2/2 = \frac{(\mathrm{sen}\,t)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 4\cdot 3a\cdot\left.\frac{(\mathrm{sen}\,t)^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4\cdot 3a\cdot 1/2 = \boxed{6a}$$

Jacinto Calatayud

www.raquelserrano.com

(2)



$$\cos\theta = \frac{x}{\rho(\theta)} \; ; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho(\theta)}$$

$$x = \rho(\theta) \cdot \cos\theta$$

$$y = \rho(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\rightarrow x' = \rho'(\theta) \cdot \cos\theta + \rho(\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta)$$

$$\rightarrow y' = \rho'(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta + \rho(\theta) \cdot \cos\theta$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta \cdot \rho^2(\theta) + \cos^2 \cdot \rho'(\theta)^2 + 2\rho(\theta) \cdot \rho'(\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta) \cdot (\cos\theta) + \cos^2\theta \cdot \rho^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) \cdot (\rho'(\theta)^2) + 2\rho(\theta)\rho'(\theta) \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}\, d\theta.$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta \cdot \rho^2(\theta) + \cos^2\theta\,(\rho'(\theta))^2 + \cos^2\theta \cdot \rho^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) \cdot (\rho'(\theta))^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2(\theta)(\operatorname{sen}^2 + \cos^2) + (\rho'(\theta))^2 \cdot (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}\, d\theta$$

Llamando $\rho(\theta) = \rho$

$$\boxed{L = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta}$$

www.raquelserrano.com

1

2.

Cuando una curva se parametriza en longitud de arco tiene una propiedad:

$$\bar{r}(s) = \left[\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}\right]$$

Cuando se parametriza en s se cumple $|\bar{r}'(s)| = 1$ (módulo)

Por ello hay que comprobar que da 1

$$x = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \qquad x' = -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{r}'(s) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right]$$

$$|\bar{r}'(s)| = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}}$$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$|\bar{r}'(s)| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{|\bar{r}'(s)| = 1}$$

→ Ahora hay que calcular el triedro de Frenet $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$

$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}k = 0$

$t = \bar{r}'(s)$

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}''(s)}{|\bar{r}''(s)|} \qquad \bar{r}''(s) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\vec{j}\right]$$

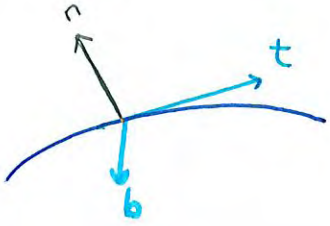
$$\bar{t} = \frac{\bar{r}'(s)}{|\bar{r}'(s)|} \qquad \bar{r}''(s) = \left[\left(-\tfrac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} - \left(\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\vec{j}\right]$$

$$|\bar{r}''(s)| = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)}$$

www.raquelserrano.com

$$|\bar{r}''(s)| = \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[\underbrace{\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right) + \cos^2\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)}_{1}\right]} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{n} = -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}$$



$$\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

componentes de t

componentes n

Determinante y luego se le resta al revés

Producto vectorial es un determinante

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{k} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{\imath}\right)$$

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

Curvatura: $\kappa = |\bar{r}''(s)| = \frac{1}{2}$ $\qquad R = \frac{1}{\kappa} = 2$

Torsión:

$$\tau \Rightarrow \frac{\bar{r}'(s) \cdot [\bar{r}''(s) \times \bar{r}'''(s)]}{|\bar{r}''(s)|^2}$$

Como es muy larga la fórmula

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\tau\bar{n}$$ Utilizamos esto

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath} = +\tau\left(+\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{2}$$

www.raquelserrano.com

⑥ Parametrice $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$ respecto a s, comenzando en $t=0$.

(comenzando en $t=0$ significa que)

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = t\sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x'(t) = e^t \\ y'(t) = -e^{-t} \\ z'(t) = \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$$s = \int_{t_0=0}^{t} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$\left.\begin{array}{l} x'(t)^2 = e^{2t} \\ y'(t)^2 = e^{-2t} \\ z'(t)^2 = 2 \end{array}\right\} \quad s = \int_0^t \sqrt{e^{2t} + \frac{1}{e^{2t}} + 2}\, dt$$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$e^{2t} + \frac{1}{e^{2t}} + 2 = \frac{e^{4t} + 1 + 2e^{2t}}{e^{2t}}$

$(e^{2t}+1)^2 = e^{4t} + 1 + 2e^{2t}$

$\frac{(e^{2t}+1)^2}{e^{2t}}$

$\sqrt[2]{e^6} = e^3$

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{(e^{2t}+1)^2}{e^{2t}}}\, dt = \int_0^t \frac{e^{2t}+1}{e^t}\, dt = \int_0^t \frac{e^{2t}}{e^t}\, dt + \int_0^t \frac{1}{e^t}\, dt$$

$$= \int_0^t e^t dt + \int_0^t e^{-t} dt = \left[e^t\right]_0^t + \left[-e^{-t}\right]_0^t = \left[e^t - e^0\right] + \left[-e^{-t} - (-e^0)\right] = (e^t - 1) +$$

$-e^{-t} + 1 = s = e^t - e^{-t}$ tenemos $s(t)$ ahora hay que saber t

$s = e^t - \frac{1}{e^t}$ $\quad e^t = u$ $\quad s = u - \frac{1}{u} = \frac{u^2 - 1}{u}$ $\quad = su = u^2 - 1$

$0 = u^2 - su - 1$

$u = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} = \begin{cases} + \\ \times \end{cases}$

como e^t siempre es positivo no puede ser la solución −

$e^t = \frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$

Para quitar la e con Ln es la op inversa se pone Ln.

$\ln e^t = \ln \frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$

$t = \ln\left(\frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}\right)$

www.raquelserrano.com

$$x(t) = e^t \Rightarrow \quad x(s) = \left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)$$

$$y(s) = \left(\frac{2}{s+\sqrt{s^2+4}}\right)$$

$$z(s) = \sqrt{2} \cdot \ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)$$

$$\beta(s) = \left[\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}, \frac{2}{s+\sqrt{s^2+4}}, \sqrt{2}\cdot\ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)\right]$$

(10) Longitud

a) $\rho = 3\operatorname{sen}\theta \cos\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

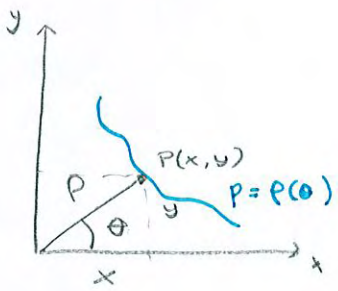
b) $y = x^2$ entre $x=0$ y $x=a$

c) $\rho = e^{-\theta}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi n$

d) Intersección

$y = x^2$
$z = 2/3\, xy$
} entre puntos $(0,0,0)$ y $(3,9,18)$

(11) Curvatura y torsión d)



Coordenadas polares (ρ, θ)

$\rho \rightarrow$ distancia del origen al punto

$\theta \rightarrow$ ángulo

En la calculadora polares → pol
cartesianas → rec

Pol → Rec
$(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$ → Trigonométrica
$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\operatorname{sen}\theta$

Para pasar de cartesianas a polares

Rec → Pol
$(x, y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

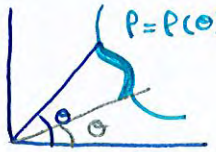
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

www.raquelserrano.com

Cuando está en polares hay las siguientes formulas para calcular la longitud del arco, la torsión y la curvatura: Torsión = 0 son curvas planas

Longitud de arco

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta$$



Curvatura

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

No se salen del plano.

a) Longitud y curvatura

$\rho = 3\operatorname{sen}\theta$ entre $-\pi/2$ a $+\pi/2$ $\quad \rho' = 3\cos\theta \quad \rho'' = -3\operatorname{sen}\theta$

$$\rightarrow S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{9\operatorname{sen}^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{9(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}\, d\theta$$

($\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\, d\theta = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 3[\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\left[\pi/2 - (-\pi/2)\right] = \boxed{3\pi}$$

$$\rightarrow K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{9\operatorname{sen}^2\theta + 18\cos^2\theta - (-9\operatorname{sen}^2\theta)}{9^{3/2}} = \frac{18\operatorname{sen}^2\theta + 18\cos^2\theta}{9^{3/2}}$$

$$= \frac{18}{9^{3/2}} = \frac{2 \cdot 9}{9\sqrt{9}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Puede también ser en función de θ

c) $\rho = e^{-\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi n$ Longitud y curvatura

$\rho' = e^{-\theta} \cdot -1 = -e^{-\theta} \quad \rho'' = e^{-\theta}$

$$\rightarrow S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi n} \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi n} \sqrt{2e^{-2\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi n} \sqrt{2}\sqrt{e^{-2\theta}}\, d\theta =$$

www.raquelserrano.com

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = \frac{1}{f'(x)} e^{f(x)}$$

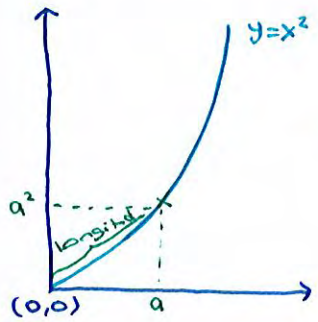
$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi n} e^{-\theta}\, d\theta = \left[-e^{-\theta}\right]_0^{2\pi n} = \sqrt{2}\left[-e^{-2\pi n} - (-e^{0})\right] \qquad e^{-x}\cdot -1\,dx = \frac{1}{-1}e^{-1}$$

$$= \boxed{\sqrt{2}\left[1-e^{-2\pi n}\right]} \quad \text{longitud}$$

→ $$k = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{2/3}} = \frac{\cancel{e^{-2\theta}} + 2e^{-2\theta} - \cancel{e^{-2\theta}}}{(e^{-2\theta}+e^{-2\theta})^{2/3}} = \frac{2e^{-2\theta}}{(2e^{-2\theta})^{2/3}} = \frac{\cancel{2e^{-2\theta}}}{\cancel{2e^{-2\theta}}\sqrt{2e^{-2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2\theta}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e^{-2\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-\theta}} = \boxed{\frac{e^{\theta}}{\sqrt{2}}} \quad \text{curvatura}$$

b) Longitud y curvatura $y = x^2$ entre $x=0$ y $x=a$



→ $$s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left[1+(y'(x))^2\right]}\,dx$$

$y = x^2$
$y' = 2x$
$y'' = 2$

$$s(x) = \int_0^a \sqrt{(1+4x^2)}\,dx =$$

Integral que se utiliza:

$$\left[\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|\right]$$

$a^2 = 1 \quad a = 1$
$u^2 = 4x^2 \quad u = 2x$
$du = 2dx$

Hay que cambiar los límites: $x=0 \quad u=0$ Cambio de variable
$x=a \quad u=2a$ ←

$$= \int_0^{2a} \sqrt{(1+u^2)}\,\frac{du}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{(1+u^2)}\,du$$

ahora se ha quedado igual que la la integral que está en lápiz

Esto se hace porque no se conoce esa integral, hay que hacer que se parezca a otra que sí conocemos.

No hace falta volver al cambiado porque es una integral con límites y los límites también se han cambiado.

www.raquelserrano.com

$$\frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{(1+u^2)}\,du = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2+1}\right)_0^{2a}+\left(\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|\right)_0^{2a}\right]$$

$$s = \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{2}\sqrt{4a^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|2a+\sqrt{4a^2+1}-1\right|\right]$$ longitud

→ $$K=\left[\frac{f''(x_0)}{\left[1+f'(x_0)^2\right]^{3/2}}\right] = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$ en cualquier punto de x

$y=x^2 \quad y'=2x \quad y''=2$

Si $x=0$ $K=\frac{2}{(1+0)^{3/2}}=\frac{2}{1}=2$ Radio $=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}$ la circunferencia tangente a la curva tiene un radio de $1/2$ de curvatura

Si $x=1$ $K=\frac{2}{5^{3/2}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$ $R=\frac{5\sqrt{5}}{2}\simeq 5'59$

d) Intesección entre (0,0,0) y (3,9,18) Longitud, curvatura y torsión.

$y=x^2$
$z=\frac{2}{3}xy$ } curva alabeada

↓explícita

$y=x^2$
$z=\frac{2}{3}x^3$

$y'=2x$
$z'=\frac{2}{3}\cdot 3x^2=2x^2$

→ $$s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y'x)^2+(z'x)^2}\,dx = \int_0^3\sqrt{1+4x^2+4x^4}\,dx$$ $(2x^2+1)^2$ El cuadrado se va con la raíz

$$= \int_0^3(2x^2+1)dx = \int_0^3 dx + 2\int_0^3 x^2\,dx = \left[x\right]_0^3 + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$S=\left[3-0\right]+2\left[\frac{3^3}{3}-0\right]=3+18=\boxed{21}$$ longitud

→ Vamos a pasar de explícita a paramétricas con un parametro cualquiera t:

$$\bar{r}(t)\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ z=\frac{2}{3}t^3\end{cases} \quad K(t)=\frac{|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|}{|r'(t)|^3}=$$

$\bar{r}(t)=(t,t^2,\frac{2}{3}t^3) \quad r'(t)=(1,2t,2t^2) \quad r''(t)=(0,2,4t)$

www.raquelserrano.com

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{vmatrix}$$

$$= (8t^2 - 4t^2)\bar{i} - 4t\bar{j} + 2\bar{k} = (4t^2, -4t, 2)$$

$$|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)| = \sqrt{16t^4 + 16t^2 + 4} = \sqrt{(4t^2+2)^2} = 4t^2 + 2$$

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 2t^2 + 1$$

$$K(t) = \frac{4t^2+2}{(2t^2+1)^3} = \frac{2(2t^2+1)}{(2t^2+1)^3} = \frac{2}{(2t^2+1)^2} = \boxed{\frac{2}{(2x^2+1)^2}} \text{ curvatura}$$

$$\rightarrow \quad \tau(t) = \frac{\left\| r'(t) \cdot [\bar{r}''(t) \times \bar{r}'''(t)] \right\|}{|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|^2} = \frac{8}{(4t^2+2)^2} \uparrow = \boxed{\frac{8}{(4x^2+2)^2}} \text{ Torsión}$$

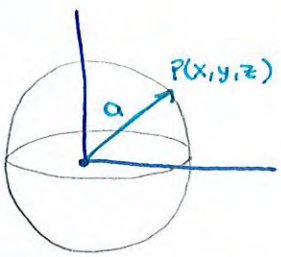
$$\bar{r}'''(t) = (0,0,4) \qquad \bar{r}''(t) \times \bar{r}'''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 4t \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} = (8,0,0)$$

$$r'(t) \cdot (\bar{r}''(t) \times r'''(t) = (1\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t^2\bar{k}) \cdot (8\vec{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}) = 8 \uparrow$$

SUPERFICIES

- Implícita
- Explícita
- Paramétrica

Ejemplo



$\boxed{d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ distancia del origen a la superficie

En una esfera $d = a$

$$a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\boxed{a = x^2+y^2+z^2}$ siempre es el mismo

www.raquelserrano.com

→ Implícita $F(x,y,z)=0$ $\boxed{x^2+y^2+z^2-a^2=0}$

→ Explícita $\boxed{z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ $z=f(x,y)$

→ Paramétricas

Es la forma más importante, una superficie tiene 2 dimensiones y por ello hay que ponerla en función de 2 parametros

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,v)\\ y&=y(u,v)\\ z&=z(u,v)\end{aligned}\right\}$$

Hay muchas formas de parametrizar, la + fácil es la parametrización trivial:

$$\left.\begin{aligned} x&=u\\ y&=v\\ z&=\pm\sqrt{a^2+u^2-v^2}\end{aligned}\right\}$$

derivada de una raíz

$y=\sqrt{f(x)}$ $\quad y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

(12) Elipsoide $x^2+2y^2+z^2=2$ $\quad P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$$\left.\begin{aligned} x&=u\\ y&=v\\ z&=\pm\sqrt{2-u^2-2v^2}\end{aligned}\right\} \qquad z=\pm\sqrt{2-x^2-2y^2}=\pm\sqrt{2-u^2-2v^2}$$

Parametrización

La base son dos vectores del plano tangente r'_u y r'_v. (Paramétricas) Contenidos en el plano tangente y no necesariamente perpendiculares.

$$\bar{r}(u,v)=x(u,v)\bar{i}+y(u,v)\bar{j}+z(u,v)\bar{k}$$

$$\bar{r}=u\bar{i}+v\bar{j}\pm\sqrt{2-u^2-2v^2}\,\bar{k} \longrightarrow \bar{r}=\left(u,v,\pm\sqrt{2-u^2-2v^2}\right)$$

$$\boxed{\bar{r}'_u=\left(1,0,\pm\left(\frac{-2u}{2\sqrt{2-u^2-2v^2}}\right)\right)}$$

$$\bar{r}'_v=\left(0,1,\pm\left(\frac{-4v}{2\sqrt{2-u^2-2v^2}}\right)\right)=\boxed{\left(0,1,\pm\frac{-2v}{\sqrt{2-u^2-2v^2}}\right)}$$

base para cualquier punto del elipsoide

Hay muchas bases diferentes

www.raquelserrano.com

Ahora hay que averiguar la base en $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$$r'_v = \left(1, 0, \frac{-v}{\sqrt{2-v^2-2v^2}}\right)$$

$x \quad y \quad z$

$u \quad v$

$u = \frac{-\sqrt{2}}{2} \qquad v = \frac{1}{2}$

se sustituyen los valores de u y v en r'_u y r'_v

Como ε es positiva, sabemos que estamos por la parte de arriba del elipsoide y por ello en $\pm$ se coge el $+$.

$$r'_u = \left(1, 0, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r'_v = (0, 1, -1)$$

Base en el punto P

$$\rightarrow \frac{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}} = \frac{+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{+\left(-2\cdot\frac{1}{2}\right)}{1} = -1$$

Plano tangente al elipsoide en $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ (x'_u)_0 & (y'_u)_0 & (z'_u)_0 \\ (x'_v)_0 & (y'_v)_0 & (z'_v)_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x+\frac{\sqrt{2}}{2} & y-\frac{1}{2} & z-1 \\ 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sqrt{2}x + 2y + 2z - 4 = 0$$

Vector normal unitario a la superficie $\bar{N}$

$$\bar{N} = \frac{(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} =$$

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

Este es un vector normal hay muchos pero el unitario siempre es el mismo

www.raquelserrano.com

$$|\bar{r}_0' \times \bar{r}_0''| = \sqrt{\frac{1}{2}+1+1} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{5}/\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\bar{N} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\bar{k}}$$ Vector normal

(15) 2 Curvas alabeadas en el espacio definidas de forma paramétrica

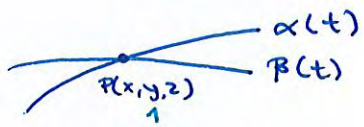
$\alpha(t) = (t, 1, t^2 - t)$

$\beta(t) = (t-1, 1-t, 2t^2 - 4t + 2)$

¿Se cortan? Ambas contenidas en $z = x(x-y)$

a) Cos ángulo ambas rectas punto corte

b) Usa la 1ª forma fundamental de la superficie para calcular los ángulo



Ecuaciones paramétricas de ambas curvas:

$$\alpha \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t^2 - t \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} x = t-1 \\ y = 1-t \\ z = 2t^2 - 4t + 2 \end{cases}$$

Como la y en α es siempre 1, donde se cortan ambas curvas y debe ser 1. Por ello la y de β debe ser 1 también.

$$y = 1 - t = 1 \quad t = 0$$

$$\beta(P) \begin{cases} x = 0 - 1 = -1 \\ z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

las t no se igualan porque no tienen porque ser iguales las de las dos curvas

Hay que comprobar que la curva α pasa por hay

$$\alpha \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Big| \; t = -1$$

→ de los mismos valores porque se cortan y ese es el punto en el que hacen.

www.raquelserrano.com

En el punto P, t vale -1 en la curva α y $t=0$ en la curva β.

Para comprobar que están en la superficie tienen que cumplir la ecuación $z=x(x-y)$

$$\alpha \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t^2-t \end{cases} \quad z = x(x-y) \quad t^2-t = t(t-1) = t^2-t \rightarrow \text{se cumple}$$

$$\beta \begin{cases} x=t-1 \\ y=(1-t) \\ z(2t^2-4t+2) \end{cases} \quad (2t^2-4t+2) = t-1\left[(t-1)-(1-t)\right] =$$

$$= (t-1)[2t-2] = 2t^2-2t-2t+2 = 2t^2-4t+2$$

se cumple

a) Para sacar el ángulo que forman dos curvas en un punto saco los vectores tangentes en ese punto.

Calculamos el vector tangente a α y β

$$t = \frac{\bar{r}'(t_0)}{|r'(t_0)|} \qquad \bar{r}(t) = (t, 1, t^2-t)$$

$$\bar{r}'(t) = (1, 0, 2t-1) \rightarrow \bar{r}'_\alpha(t_0) = (1, 0, -3)$$ Derivada de r particularizada $t=-1$

$$|r'(t_0)| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$t_\alpha = \frac{(1,0,-3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\bar{r}(t) = (t-1, 1, (2t^2-4t+2)); \quad r'_\beta(t) = (1, -1, 4t-4)$$

$$\bar{r}'(t_0) = (1, -1, -4); \quad |r'(t_0)| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$t_\beta = \frac{1-1-4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

Para ello calculamos el producto escalar $\bar{t}_\alpha \cdot \bar{t}_\beta = 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} + 0 + \frac{-3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-4}{3\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}}\right) = \frac{13}{3\sqrt{20}} = \boxed{\frac{13}{6\sqrt{5}}}$$ cos del ángulo

www.raquelserrano.com

7 . .

b) **1ª FORMA FUNDAMENTAL (DE LA SUPERFICIE)**

→ Hay que parametrizar la superficie

$z = x(x-y)$ $\quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u(u-v) \end{cases}$ $\quad \bar{r}(u,v) = (u, v, u(u-v))$

→ Se calcula una base $\bar{r}'_u$ y $\bar{r}'_v$:

$\bar{r}'_u = (1, 0, 1\cdot(u-v) + u\cdot 1) = \underline{(1, 0, 2u-v)}$

$\bar{r}'_v = \underline{(0, 1, -u)}$ Base genérica.

→ Ahora una base en $P(-1, 1, 2)$:

$x \; y \; z$

$u \; v$

En P $u = -1$ y $v = 1$

$\underline{\bar{r}'_u = (1, 0, -3) \quad \bar{r}'_v = (0, 1, 1)}$

- BASE:

Cualquier vector del plano tangente puede ponerse como combinación lineal de $\bar{r}'_u$ y $\bar{r}'_v$.

$\bar{r}'_\alpha(t_0) = A \cdot r'_u + B\, r'_v \qquad r'_\beta(t_0) = C\,\bar{r}'_u + D\cdot \bar{r}'_v$

$(1, 0, -3) = A(1, 0, -3) + B(0, 1, 1) \qquad (1, -1, -4) = C(1, 0, -3) + D(0, 1, 1)$

$A = 1 \quad B = 0 \qquad C = 1 \quad D = -1$

→ Hacemos el producto escalar en función de A, B, C, D y obtenemos la 1ª forma fundamental

$\bar{r}'_\alpha(t_0) \cdot \bar{r}'_\beta(t_0) = A\cdot C\cdot |\bar{r}'_u|^2 + AD(\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v) + BC(\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v) + BD|\bar{r}'_v|^2$

$A\cdot C\cdot |\bar{r}'_u|^2 + (\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v)[AD + BC] + BD|\bar{r}'_v|^2$

$E \qquad F \qquad G$

E y G deben ser positivas.

$E = |\bar{r}'_u|^2 = 10 \qquad F = -3 \qquad G = 2$

www.raquelserrano.com

$$\bar{r}'_\alpha(t_0)\cdot\bar{r}'_\beta(t_0) = ACE + F[AD+BC] + BDG$$

$$\bar{r}'_\beta(t_0)\cdot\bar{r}'_\alpha(t_0) = 10 - 3[-1] + 0 = \underline{13}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \\ D=-1 \end{cases}$$

→ Utilizamos el producto escalar de los dos vectores:

$$\left[\bar{r}'_\alpha(t_0)\,\bar{r}'_\beta(t_0)\right] = |\bar{r}'_\alpha(t_0)|\cdot|\bar{r}'_\beta(t_0)|\cdot\cos\theta$$

b)

$$\cos\theta = \frac{13}{3\sqrt{20}} = \boxed{\frac{13}{6\sqrt{5}}}$$

(16) Calcula K y H $\quad z = x(x-y) \quad P(-1,1,2)$

$$\left.\begin{array}{l} x=u \\ y=v \\ z=(u^2-uv) \end{array}\right\} \bar{r}(u,v) = (u, v, u^2-uv) \longrightarrow \text{Base} \begin{cases} r'_u = (1,0,2u-v) \\ r'_v = (0,1,-v) \end{cases}$$

Genérica.

→ Particularizamos la base en el punto P:

$u=-1 \quad v=1 \quad \bar{r}'_u = (1,0,-3) \quad \bar{r}'_v = (0,1,1)$

→ Utilizamos la 1ª forma fundamental

$$\boxed{E = |\bar{r}'_u|^2} \quad \boxed{F = \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v} \quad \boxed{G = |\bar{r}'_v|^2}$$

$E=10 \quad F=-3 \quad G=2$

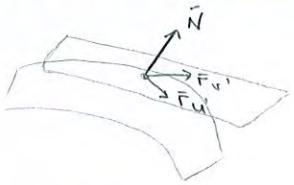
→ Necesitamos calcular la 2ª forma fundamental:

$\bar{r}''_{uu} = (0,0,2)$

$\bar{r}''_{uv} = (0,0,-1)$

$\bar{r}''_{vu} = (0,0,0)$

$\bar{N}$ = Vector normal unitario $= \dfrac{(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}\right)$



$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$$

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = \sqrt{3^2+1^2+1^2} = \sqrt{11}$$

www.raquelserrano.com

$e = \bar{F}_{uu}'' \cdot \bar{N} = \frac{2}{\sqrt{11}}$

$f = \bar{F}_{uv}'' \cdot \bar{N} = \frac{-1}{\sqrt{11}}$

$g = \bar{F}_{vv}'' \cdot \bar{N} = 0$

→ se aplica la fórmula de la curvatura de Gauss

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2}{20 - (-3)^2} = \frac{-\frac{1}{11}}{11} = \boxed{-\frac{1}{121}}$$

→ Curvatura media:

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{11}} \cdot 2 + 0 - 2\left(\frac{-1}{\sqrt{11}}\right)(-3)}{22} = \frac{\frac{4}{\sqrt{11}} - \frac{6}{\sqrt{11}}}{22}$$

$$= \frac{-2}{22\sqrt{11}} = \boxed{\frac{-1}{11\sqrt{11}}}$$

- En en una superficie se denominan puntos elípticos a aquellos $K > 0$.
  - puntos parabólicos a aquellos en los $K = 0$.
  - puntos hiperbólicos $K < 0$.

- En una superficie: se denominan puntos umbilicales a aquellos $\bar{N} = cte$ $\quad d\bar{N} = 0$
  - Si al hacer el producto vectorial sale cero.

(17) Comprueba que los puntos de la superficie $z = \operatorname{sen}(x+y)$ son parabólicos ($K = 0$); y los que pertenecen a la recta $x + y = k$ $k \in \mathbb{Z}$ son además umbilicales ($d\bar{N} = 0$)

→ Parametrizamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = \operatorname{sen}(u+v) \end{array}\right\} \rightarrow \bar{F}_{uv} = (u, v, \operatorname{sen}(u+v))$$

$$\bar{F}_u' = (1, 0, \cos(u+v)) \qquad \bar{F}_v' = (0, 1, \cos(u+v))$$

→ $E = |\bar{F}_u'|^2 = 1 + \cos^2(u+v)$ $\qquad G = |\bar{F}_v'|^2 = 1 + \cos^2(u+v)$

$F = \bar{F}_u' \cdot \bar{F}_v' = \cos^2(u+v)$

www.raquelserrano.com

→ $\bar{N} = \dfrac{(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} = \dfrac{-\cos(u+v)\bar{\imath} - \cos(u+v)\bar{\jmath} + \bar{k}}{\sqrt{2\cos^2(u+v)+1}}$

$$\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \cos(u+v) \\ 0 & 1 & \cos(u+v) \end{vmatrix} = [-\cos(u+v)]\bar{\imath} + \cos(u+v)\bar{\jmath} + \bar{k}$$

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = \sqrt{2\cos^2(u+v)+1}$$

→ $\bar{r}''_{uu} = (0,0,-\operatorname{sen}(u+v))$ $\bar{r}''_{uv} = (0,0,-\operatorname{sen}(u+v))$ $\bar{r}''_{vv} = (0,0,-\operatorname{sen}(u+v))$

→ 2ª forma fundamental:

$e = \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{N} = \dfrac{-\operatorname{sen}(u+v)}{\sqrt{2\cos^2(u+v)+1}}$

$f = \bar{r}''_{uv} \cdot \bar{N} = \;''$

$g = \bar{r}''_{vv} \cdot \bar{N} = \;''$

Curvatura de Gauss:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0}{EG-F^2} = 0 \qquad e = g = f$$

$\boxed{K = 0}$

b) Superficie $z = \operatorname{sen}(x+y)$ Rectas $(x+y = k\pi) \rightarrow$ En superficie

$z = \operatorname{sen} k\cdot\pi$ $\operatorname{sen}\pi = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 180^\circ$ por ello sen de un número $\cdot\pi$ siempre va a ser 0. $\operatorname{sen} k\pi = 0$

$\left.\begin{matrix} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{r}_{uv} = (u,v,0)$ $\bar{r}'_u = (1,0,0)$ $\bar{r}'_v = (0,1,0)$

$$\bar{N} = \frac{(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|} = \frac{\bar{k}}{1} = \bar{k} \rightarrow \text{constante} \quad \boxed{\bar{N} = \bar{k}}$$

$d\bar{N} = 0$

$$(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}$$

www.raquelserrano.com

15. Comprueba que las curvas definidas en forma paramétrica:

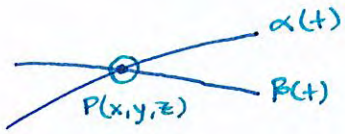
$$\alpha(t) = (t, 1, t^2 - t) \qquad \beta(t) = (t-1, 1-t, 2t^2 - 4t + 2)$$

se cortan en un punto y ambas están contenidas en la superficie

$$z = x(x-y)$$

a) Calcula el coseno del ángulo que forman ambas rectas en el p. de corte

b) Usa la 1ª forma fundamental de la superficie dada para encontrar de otra forma, el coseno del ángulo que forman ambas rectas en su punto de corte.



Ecuaciones paramétricas de ambas curvas:

$$\alpha \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t^2 - 1 \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} x = t-1 \\ y = 1-t \\ z = 2t^2 - 4t + 2 \end{cases}$$

Como las "y" en α son siempre 1, donde se corten ambas curvas "y" en β también debe ser 1.

$y = 1 - t = 1 \quad t = 0$ se sustituye

$$\beta_{(P)} \begin{cases} x = 0 - 1 = -1 \\ z = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

se comprueba que la curva α pase por ese punto:

$$\alpha \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1^2 - (-1) = 2 \end{cases} \rightarrow \text{da los mismos valores } \underline{\text{porque si se cortan en ese punto}}$$

→ Para comprobar que están contenidas en la superficie se debe cumplir $z = x(x-y)$

$$\alpha \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t^2 - t \end{cases} \qquad z = x(x-y)$$

$$t^2 - t = t(t-1) \rightarrow \underline{\text{se cumple}}$$

www.raquelserrano.com

$$\beta \begin{cases} x = t-1 \\ y = 1-t \\ z = 2t^2-4t+2 \end{cases} \qquad z = x(x-y)$$

$$2t^2-4t+2 = t-1\,[(t-1)-(1-t)]$$

$$2t^2-2t-2t+2 = (t-1)\cdot(2t-2) \rightarrow \text{se cumple}$$

a) Para sacar el ángulo que forman dos curvas en un punto saco los vectores tangentes en ese punto.

$$t = \frac{\bar{r}'(t_0)}{|r'(t_0)|} \rightarrow \bar{r}(t) = (t, 1, t^2-t)$$

$$r'(t) = (1, 0, 2t-1) \xrightarrow{t=-1} \bar{r}'(-1) = (1, 0, -3)$$

$$|r'(-1)| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$t_\alpha = \frac{(1,0,-3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\rightarrow \bar{r}(t) = (t-1, 1-t, 2t^2-4t+2)$$

$$\bar{r}'(t) = (1, -1, 4t-4) \xrightarrow{t=0} \bar{r}'(0) = (1, -1, -4)$$

$$|r'(0)| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$t_\beta = \frac{(1,-1,-4)}{3\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}\right)$$

→ Como el producto escalar $\bar{t}_\alpha \cdot \bar{t}_\beta = \bar{t}_\alpha \cdot \bar{t}_\beta \cdot \cos\theta$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} + 0 + \frac{-3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-4}{3\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{2}}\right) = \frac{13}{3\sqrt{20}} = \boxed{\frac{13}{6\sqrt{5}}}$$

cos del ángulo

b) se parametriza

$$z = x(x-y)$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u(u-v) \end{cases} \qquad \bar{r}(u,v) = (u, v, u(u-v))$$

→ se calcula la base $\bar{r}_u'$ y $\bar{r}_v'$

$$\bar{r}_u' = (1, 0, 1\cdot(u-v) + u\cdot 1) = (1, 0, 2u-v)$$

$$\bar{r}_v' = (0, 1, -u)$$ Bases genéricas

www.raquelserrano.com

(2)

→ Base en $P(-1,1,2)$
$x\ y\ z$
$u\ v$

En P $u=-1$ $v=1$ $\bar{r}'_u = (1,0,-3)$ $\bar{r}'_v = (0,1,1)$

$\bar{r}'_\alpha(t_0) = A\cdot\bar{r}'_u + B\bar{r}'_v$

$(1,0,-3) = A\cdot(1,0,-3) + B(0,1,1)$

$A=1 \quad B=0$

$\bar{r}'_\beta(t_0) = C\cdot\bar{r}_u + D\cdot\bar{r}_v$

$(1,-1,-4) = C(1,0,-3) + D(0,1,1)$

$C=1 \quad D=-1$

→ Hacemos el producto escalar en función de A,B,C,D y obtenemos la 1ª forma fundamental

$$\bar{r}_\alpha(t_0)\cdot\bar{r}_\beta(t_0) = A\cdot C\cdot|\bar{r}'_u|^2 + AD(\bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v) + BD|\bar{r}'_v|^2$$

$$A\cdot C\cdot\underbrace{|\bar{r}'_u|^2}_{E} + \underbrace{(\bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v)}_{F}[AD+BC] + BD\underbrace{|\bar{r}'_v|^2}_{G}$$

$E = |\bar{r}'_u|^2 = 10 \quad F=-3 \quad G=2$

$\bar{r}'_\alpha(t_0)\cdot\bar{r}'_\beta(t_0) = ACE + F[AD+BC] + BDG$

$\bar{r}_\beta'(t_0)\ \bar{r}_\alpha'(t_0) = 10\cdot 3[-1] + 0 = \underline{13}$

$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \\ D=-1 \end{cases}$

→ Utilizamos el producto escalar:

$$\left[\bar{r}'_\alpha(t_0)\cdot\bar{r}'_{\beta(t_0)}\right] = \left|\bar{r}'_\alpha(t_0)\right|\cdot\left|\bar{r}_\beta'(t_0)\right|\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta = \boxed{\frac{13}{6\sqrt{5}}}$$

www.raquelserrano.com

12. Parametrización del elipsoide:

$$x^2+2y^2+z^2=2 \qquad P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

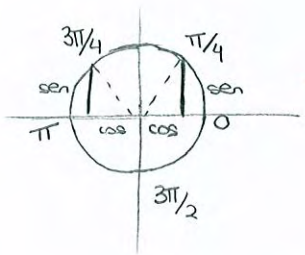
$$\bar{X}(\varphi,\theta) = \left(\sqrt{2}\cdot\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{2}\,\text{sen}\,\varphi\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

↓ ¿φ,θ?

$$\rightarrow \sqrt{2}\,\text{sen}\,\varphi = 1 \rightarrow \text{sen}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\varphi = \pi/4}$$

$$\rightarrow \cos\varphi\cdot\text{sen}\,\theta = 1/2 \rightarrow \cos\pi/4\cdot\text{sen}\,\theta = 1/2$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\,\theta = 1/2 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ó } \frac{3\pi}{4}$$



$$\rightarrow \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\theta = -1/2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\theta = -1/2 \rightarrow \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\rightarrow X_\varphi = \left(-\sqrt{2}\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi, -\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \sqrt{2}\cos\varphi\right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)$$

$$X_\theta = \left(-\sqrt{2}\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta; \cos\varphi\cos\theta; 0\right) \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{-1}{2}; 0\right)$$

Base

Plano tangente:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & k \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(-2; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right) = \left(-1, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{-1\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}(z-1)=0}$$

Plano tangente

www.raquelserrano.com

→ Ejercicio pág 30:

Demostrar que el campo vectorial ↓ es conservativo y hallar una función potencial

$$\bar{f}(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y - y)\bar{\imath} + (e^x \cos y - x - 2)\vec{\jmath}$$

$$P(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - y$$

$$Q(x,y) = e^x \cos y - x - 2$$

$$U(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \phi(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{dU}{dy} = Q(x,y)$$

$$U(x,y) = \int e^x \cos y - x - 2 + \phi(x)$$

$$P(x,y)$$

$$\vec{f}(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y - y)\bar{\imath} + (e^x \cos y - x - 2)\vec{\jmath}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= e^x \cos y - 1 - e^x \operatorname{sen} y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= e^x \cos y - e^x \operatorname{sen} y - 1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dQ}{dx} \Rightarrow \text{es conservativo}$$

$$\frac{dU}{dx} = P = e^x \operatorname{sen} y - y \rightarrow U = e^x \operatorname{sen} y - yx + \phi(y)$$

$$\frac{dU}{dy} = \overbrace{e^x \cos y - x + \phi'(y)}^{Q} = e^x \cos y - x - 2$$

$$\phi'(y) = -2 \rightarrow \phi(y) = -2y$$

$$U(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - yx - 2y$$

www.raquelserrano.com