

## Cálculo. 1 de febrero de 2011

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

Especialidad: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ D.N.I : \_\_\_\_\_

1. Calcula las partes real e imaginaria del número complejo  $(1 + i) e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
2. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en 0 de la función:

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2 + 2x^3}{1 - x + x^2 + \sin x}$$

3. Se considera la región comprendida entre la recta horizontal  $y = 7$ , la parábola  $f(x) = -x^2 + 16$ , el eje  $X$  y el eje  $Y$ . Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar dicha región alrededor del eje  $X$ .

4. Halla el término general  $\sum_0^{\infty} a_n x^n$  de la serie de potencias

$$\frac{\cos \frac{1}{2}}{4}x - \frac{\cos \frac{1}{4}}{9}x^2 + \frac{\cos \frac{1}{6}}{16}x^3 - \frac{\cos \frac{1}{8}}{25}x^4 + \dots$$

y estudia su convergencia para los valores de  $x$ .

5. Dada la función

$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$$

- (a) Prueba que el límite no existe en  $(0, 0)$ .
- (b) Halla una trayectoria  $y = g(x)$  para la cual el límite en  $(0, 0)$  valga  $\frac{1}{5}$ .

6. Para la función

$$f(x, y) = \sqrt{6 - |x - y|},$$

- (a) Halla y dibuja en el plano su dominio.
- (b) Halla y dibuja en el plano sus curvas de nivel.

7. Sea la superficie

$$x + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{z^2} - \frac{11}{4} = 0$$

- (a) Halla el punto que pertenezca a la superficie y en el cual el vector normal es proporcional al vector  $(4, 8, 1)$ .
- (b) Calcula las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de la función definida implícitamente  $z = f(x, y)$ .
- (c) En el punto obtenido en el apartado (a), calcula el plano tangente.

8. Halla las dimensiones de una caja rectangular sin tapa con volumen 1 y superficie mínima.



7) a) El gradiente de la superficie de nivel de  $x + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{z^2} - \frac{11}{4} = 0$  está en la misma dirección que  $(4, 8, 1)$  por tanto:

$\vec{\nabla}F(x, y, z) = \lambda(4, 8, 1)$ , es decir  $(1, y, \frac{2}{z^3}) = \lambda(4, 8, 1)$  que nos proporciona las ecuaciones

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \\ y = 8\lambda \Rightarrow y = 2 \\ \frac{2}{z^3} = \lambda \Rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{2}{\lambda}} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}$$

El punto es  $(1, 2, 2)$

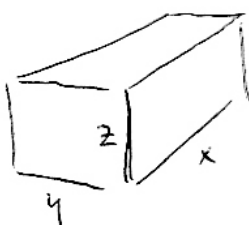
$$x + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{z^2} - \frac{11}{4} = 0; \quad x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2^2}{2} = \frac{1}{4} = 1$$

c) El plano tangente en el punto es perpendicular al vector  $\vec{\nabla}F(1, 2, 2) = (1, 2, \frac{1}{4})$ . Por tanto resulta de  $(x-1, y-2, z-2) \cdot (1, 2, \frac{1}{4}) = 0$

b) Las expresiones de las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{\frac{2}{z^3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y}{\frac{2}{z^3}}$$

8)



Puede hacerse directamente definiendo  $f(x, y)$  función del área que hay que minimizar:

$$f(x, y) = xy + 2xz + 2yz = xy + 2x \frac{1}{xy} + 2y \frac{1}{xy} = xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$$

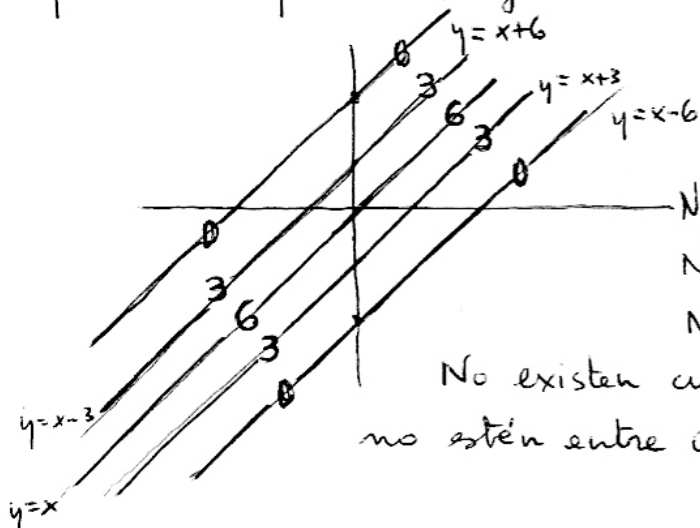
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{2}{x^2} = 0, \quad y = \frac{2}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{2}{y^2} = 0, \quad x - \frac{2}{(\frac{2}{x^2})^2} = 0; \dots \quad x = \sqrt[3]{2}; \quad y = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}; \quad z = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

También puede plantearse el lagrangiano para resolverlo:

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz - \lambda(xy + 2xz + 2yz - 1)$$

en este caso despejar  $x, y, z$  es algo más laborioso.

6) a) El dominio es  $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 - |x - y| > 0\}$ . Resolvemos la inequación para dibujar la región:  $|x - y| < 6 \Leftrightarrow -6 < x - y \wedge x - y < 6 \Leftrightarrow y < x + 6 \wedge y > x - 6$  cuya intersección es la franja.



Las curvas de nivel son rectas. Los límites de la franja son las rectas de nivel 0:

Nivel 0:  $6 - |x - y| = 0 \Rightarrow y = x - 6 \wedge y = x + 6$

Nivel 3:  $6 - |x - y| = 3 \Rightarrow y = x - 3 \wedge y = x + 3$

Nivel 6:  $6 - |x - y| = 6 \Rightarrow y = x$

No existen curvas de nivel para valores que no estén entre 0 y 6.

fin