GRADOS EN INGENIERÍA INDUSTRIAL. CURSO 2010/2011
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Cálculo. 15 de septiembre de 2011

Apellidos: _____ **Nombre:** _____

Especialidad: _____ **Grupo:** _____ **D.N.I :** _____

1. Calcula:
   (a) $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, con $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 8 + 6i$
   (b) La raiz cúbica de $-88 - 16i$ que está en el primer cuadrante.

2. Calcula el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en 0 de la función $x \operatorname{sen} x + 2\cos x - 2$ y utilízalo para calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x \operatorname{sen} x + 2\cos x - 2}.$$

3. Calcula el volumen del sólido generado al hacer girar sobre el eje x el área que resulta de la intersección de dos circunferencias de radio 1 y de centros respectivos $(0,0)$ y $(1,0)$.

4. Estudia:
   (a) El carácter de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^4+1}\right)$.
   (b) El campo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{n!}$.

5. Sea la función $f(x,y) = +\sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Dibuja sus curvas de nivel para los valores $k=0$, $k=1$, $k=2$ y para un $k>0$ general.
   (b) Estudia su diferenciabilidad en $(0,0)$.
   (c) Utiliza los resultados anteriores para esbozar una gráfica de la superficie $z = f(x,y)$.

6. La densidad de una bola de metal viene dada por la función $f(x,y) = 2\,e^{-x^2-y^2}$.
   (a) Calcula la dirección de máximo crecimiento de la densidad a partir del punto $(1,2)$.
   (b) Calcula el valor de la derivada en la dirección de máximo crecimiento.
   (c) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2,2\,e^{-5})$.

7. Determina y clasifica los puntos críticos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1a. $\frac{(3-4i)^2}{8+6i} = \frac{9-16-24i}{8+6i} = \frac{(-7-24i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} = \frac{-200-150i}{8^2+6^2} = \frac{-200-150i}{100} = -2-1.5i$

1b. $\operatorname{arctg}\frac{-16}{-88} = 0{,}179$ radianes, $-88-16i$ se encuentra en el tercer cuadrante por tanto su argumento es $\pi+0{,}179$. La raíz cúbica en el primer cuadrante es: $\sqrt[3]{88^2+16^2}\left(\cos\frac{\pi+0{,}179}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi+0{,}179}{3}\right)$

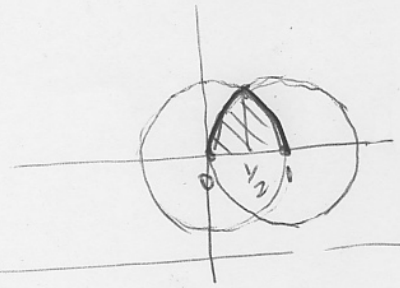
2) $T_{4,0}(x\operatorname{sen}x + 2\cos x - 2) = x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right) + 2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right) - 2 = \left(-\frac{1}{3!}+\frac{2}{4!}\right)x^4 = -\frac{1}{12}x^4$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x\operatorname{sen}x+2\cos x-2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{(x^2)^2}{2}\right)}{-\frac{1}{12}x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{-\frac{1}{12}x^4} = -6$$

3) Las circunferencias son $x^2+y^2=1$; $(x-1)^2+y^2=1$, se cortan en $x=\frac{1}{2}$.

$y=\sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}$ $\quad y=\sqrt{1-x^2}$

$$V = \int_0^{1/2}\pi\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2dx + \int_{1/2}^{1}\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx.$$

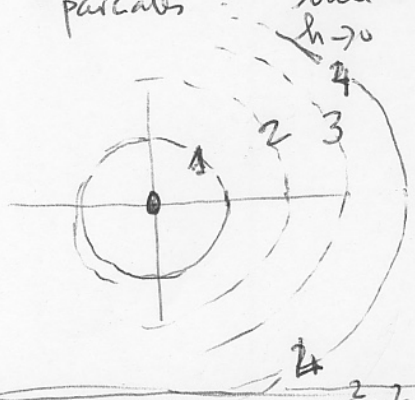


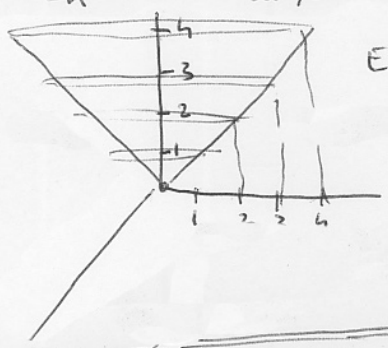
4a) $\sum_1^\infty \frac{n!}{5^n}$ es divergente porque $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{5^n}=\infty$.

$\sum_1^\infty n^2\operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^4+1}\right)$ es divergente por tener mismo carácter que $\sum_1^\infty n^2\frac{n}{n^4+1} = \sum_1^\infty\frac{n^3}{n^4+1}$ que lo es por tener mismo carácter que $\sum_1^\infty\frac{1}{n}$ armónica.

4b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^2\cancel{x^n}\cdot x}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot\frac{(n+1)^2\cancel{x^n}}{\cancel{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\cdot\frac{1}{n+1}|x| = 1\cdot 0\cdot|x|=0$ será siempre menor que 1 cualquiera que sea x. El campo es todo $\mathbb{R}$.

5 b) La función no es diferenciable en $(0,0)$ porque no existen las derivadas parciales: $\lim_{h\to 0}\frac{+\sqrt{(0+h)^2+0}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = \pm 1$ no existe





$K=0$ $\sqrt{x^2+y^2}=0 \iff (0,0)$

Es un cono $K=1$ $\sqrt{x^2+y^2}=1 \iff x^2+y^2=1$

$K=2$ $\sqrt{x^2+y^2}=2 \iff x^2+y^2=2^2$

$K=K$ $\sqrt{x^2+y^2}=K \iff x^2+y^2=K^2$

6a) $\nabla f(1,2) = \left(-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2}\right) = \left(-4e^{-5}, -8e^{-5}\right)$

b) $\|\nabla f\| = \sqrt{(-4e^{-5})^2+(-8e^{-5})^2}$

c) $\vec{v}_1(1,0,-4e^{-5})$ $\quad \vec{v}_2(0,1,-8e^{-5})$; plano: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4e^{-5} \\ 0 & 1 & -8e^{-5} \\ x-1 & y-1 & z-2e^{-5}\end{vmatrix} = 0$

7) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^3 = x - y \\ -y^3 = x - y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ x = 0 \end{array}$$

$$x^3 - x - x = x^3 - 2x = x(x^2 - 2x) = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Los puntos son $P_1(0,0)$ $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ $P_3(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

El Hessiano

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12x^2-4 \end{vmatrix} = (12x^2-4)^2 - 16$$

$f(h,h) = 2h^4 > 0$

$g(0,0) = 0$ no hay información Pero no es extremo: $f(h,-h) = 2h^4 - 4h < 0$ (cerca de $(0,0)$)

$g(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 20^2 - 16 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20 > 0$ Mínimo relativo

$g(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 20^2 - 16 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20 > 0$ Mínimo relativo